

חדו"א 1 תרגיל מספר 9 תשפ"א - חקירה המשך

ענו על השאלות הבאות:

חלק א

1. הוכיחו כי לכל $x > 1$ מתקיים כי $\frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} \leq \frac{5 \ln(x) - \frac{4}{x} + 4}{x-1}$.
2. תהיינה f, g פונקציות הגזירות בקטע I המקיימות: לכל $x \in I$ מתקיים $f'(x) \geq g'(x)$
 - (א) הוכיחו/הפריכו: לכל $x \in I$ מתקיים $f(x) \geq g(x)$
 - (ב) נניח בנוסף כי קיים $a \in I$ עבורו $f(a) = g(a)$. הוכיחו כי לכל $a \leq x \in I$ מתקיים $f(x) \geq g(x)$
3. הוכיחו כי לכל $0 < x < 1$ מתקיים $\arctan x > \ln(1+x)$.
4. הוכיחו שלכל $0 < a < b$ מתקיים $\frac{b-a}{1+b} \leq \ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right) \leq \frac{b-a}{1+a}$.
5. מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $3^x + 6^x = 5^x + 4^x$.
6. לכל a ממשי, קבעו כמה פתרונות יש למשוואה $4e^x - 7x = a$.
7. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $e^x - 4 = x \ln(x) - x + e$.
8. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan\left(\frac{x^2-1}{4x^2+1}\right)}{x-1} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin(3\pi x) \ln x}{1 + \cos(\pi x)} \right) \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x + 4)^{\frac{3}{1+2 \ln(x^2)}} \quad (\text{ג})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(\frac{8}{3x} - \sin \frac{8}{3x} \right) \quad (\text{ד})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin 3x}{3x} + 4x \right)^{\frac{2}{x}} \quad (\text{ה})$$

חלק ב

1. תהא $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה בכל הממשיים.

(א) הוכיחו/הפריכו: אם לכל x ממשי מתקיים כי $f'(x) = 0$ אז $f(x)$ היא פונקציה קבועה (כלומר קיים c ממשי כך $f(x) = c$ לכל x).

(ב) מצאו כמה פונקציות $f(x)$ מקיימות את השוויון

$$f(x) = f'(x)$$

(לכל x) וגם $f(0) = 1$ הוכיחו תשובתכם. הדרכה: בהינתן פונקציות $f(x), g(x)$ שוות לנגזרת שלהם התסכלו

$$h(x) = g(-x)f(x)$$

2. מי המספר הכי גדול בקבוצה $\{n^{\frac{1}{n}} \mid 1 \leq n \leq 2^{100}\}$?

הדרכה: חקרו את הפונקציה $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

בהצלחה! ☺