פונקציות מרוכבות
תרגיל 4 – פתרון

1. $\int_C z\operatorname{Re} z dz$ $\quad C:|z|=1$ (נגד כיוון השעון)

$z=e^{i\theta} \qquad 0\le\theta\le 2\pi$

$$\int_{|z|=1} z\operatorname{Re} zdz=\int_0^{2\pi} e^{i\theta}\cos\theta\cdot\underbrace{ie^{i\theta}}_{=z'(\theta)}d\theta=i\int_0^{2\pi}e^{2i\theta}\cos\theta d\theta$$

$$=i\int_0^{2\pi}\left(\cos 2\theta\cos\theta+i\sin 2\theta\cos\theta\right)d\theta=i\left(\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos 3\theta+\cos\theta\right)d\theta+\frac{1}{2}i\int_0^{2\pi}\left(\sin 3\theta+\sin\theta\right)d\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2}i\underbrace{\left(\frac{1}{3}\sin 3\theta+\sin\theta\right)}_{=0}\Bigg|_0^{2\pi}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos 3\theta-\cos\theta\right)\Bigg|_0^{2\pi}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}+1\right)=0$$

2. $\int_C e^z dz$

פונקציה $f(z)=e^z$ שלמה, ולכן האינטגרל $\int_C e^z dz$ אינו תלוי במסלול C, אלא רק בקצוות

$z_1=0$ ו- $z_2=1+i$

$$\Rightarrow\int_0^{1+i}e^z dz=e^z\Big|_0^{1+i}=e^{1+i}-1$$

3. $\int_C |z|\bar{z}dz$ כאשר C עקומה המורכבת מקשת של מעגל $|z|=R$, $\operatorname{Im} z\ge 0$ וקטע $-R\le\operatorname{Re} z\le R$, $\operatorname{Im} z=0$.

פתרון: $\int_C |z|\bar{z}dz=\int_0^{\pi}R\cdot\mathrm{R}\cdot\mathrm{e}^{-i\theta}\cdot R\cdot ie^{i\theta}d\theta+\int_{-R}^{R}|x|xdx=\pi iR^3$

הערה: האינטגרל על הקטע הממשי שווה לאפס, כי זה אינטגרל של פונקציה אי זוגית בקטע סימטרי.

4. $\int_C\frac{dz}{\sqrt{z}}$ $\quad C:$ $|z|=1,\operatorname{Re} z\ge 0,\sqrt{-i}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

$z=e^{i\theta} \qquad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$\sqrt{z}=e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi n\right)} \qquad n=0,1$

נתון כי : $\sqrt{-i}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

$\Rightarrow\sqrt{-i}=e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n\right)} \qquad \underline{n=0}$

$\Rightarrow\sqrt{z}=e^{i\frac{\theta}{2}}$

$$\Rightarrow \int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} d\theta = i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} d\theta = 2e^{i\frac{\theta}{2}}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = 4i\sin\frac{\pi}{4} = \underline{2i\sqrt{2}}$$

.5 $\int_1^i \frac{\ln(1+z)}{1+z}dz$ לאורך הקשת : $|z|=1\,,\ \mathrm{Im}\,z \ge 0\,,\ \mathrm{Re}\,z \ge 0$

כיוון שקיים תחום פשוט קשר D שמכיל את קשת הנ"ל ובו הפונקציה $f(z) = \frac{\ln(1+z)}{1+z}$
אנליטית , האינטגרל תלוי רק בקצוות המסילה , ז"א רק ב $z_1 = 1$ ו- $z_2 = i$

$$\Rightarrow \int_1^i \frac{\ln(1+z)}{1+z}dz = \begin{Bmatrix} \ln(1+z) = t \\ \frac{1}{1+z}dz = dt \end{Bmatrix}$$

$$= \int_{\ln 2}^{\ln(1+i)} tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_{\ln 2}^{\ln(1+i)} = \frac{1}{2}\left(\left[\ln(1+i)\right]^2 - (\ln 2)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right)^2 - (\ln 2)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\ln^2 2 + i\frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{\pi^2}{16} - \ln^2 2\right) = \left(-\frac{3}{8}\ln^2 2 - \frac{\pi^2}{32}\right) + i\left(\frac{\pi}{8}\ln 2\right)$$

.6 $\int_1^i \frac{1+\tan z}{\cos^2 z}dz$ לאורך קו ישר המחבר את הנקודות $z_1 = 1\,,\ z_2 = i$

כיוון שקיים תחום פשוט קשר D שמכיל את הקו הנ"ל ובו הפונקציה $f(z) = \frac{1+\tan z}{\cos^2 z}$
אנליטית , האינטגרל תלוי רק בנקודות $z_1 = 1$ ו- $z_2 = i$, ז"א ניתן להשתמש בנוסחת ניוטון-לייבניץ .

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) \qquad \left(F'(z) = f(z)\right)$$

ב D

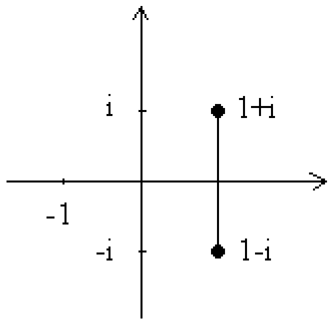
$$\int_1^i \frac{1+\tan z}{\cos^2 z}dz = \begin{Bmatrix} 1+\tan z = t \\ \frac{1}{\cos^2 z}dz = dt \end{Bmatrix}$$

$$\int_{1+\tan 1}^{1+\tan i} tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_{1+\tan 1}^{1+\tan i} = \frac{1}{2}\left((1+\tan i)^2 - (1+\tan 1)^2\right) = \frac{1}{2}\left(2\tan i + \tan^2 i - 2\tan 1 - \tan^2 1\right)$$

$$= -\left(\tan 1 + \frac{1}{2}\tan^2 1\right) + \frac{\sin i}{\cos i} + \frac{1}{2}\frac{\sin^2 i}{\cos^2 i} = -\left(\tan 1 + \frac{1}{2}\tan^2 1\right) - \frac{i\left(e^{-1} - e^1\right)}{e^{-1} + e^1} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-1} - e^1}{e^{-1} + e^1}\right)^2$$

$$= -\left(\tan 1 + \frac{1}{2}\tan^2 1 + \frac{1}{2}\tanh^2 1\right) + i\tanh 1$$

.7 $\int_C z\,\mathrm{Im}\left(z^2\right)dz \qquad C : |\mathrm{Im}\,z| \le 1\,,\ \mathrm{Re}\,z = 1$



$$z_1 = 1-i \quad ; \quad z_2 = 1+i$$

$$z(t) = 1-i+t(1+i-1+i) = 1-i+t(2i)$$
$$= 1-i+2it \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\int_0^1 (1-i+2it)\,\mathrm{Im}(1-i+2it)^2 \cdot \underbrace{2i}_{=z'(t)}\ dt$$

$$(1-i+2it)^2 = (1-i)^2 - 4t(1-i) - 4t^2 = (-4t-4t^2) + i(-2+4t)$$

$$\mathrm{Im}\, z^2 = (-2+4t)$$

$$\Rightarrow 2i\int_0^1 (1-i+2it)(4t-2)\,dt = 2i\int_0^1 \left(8it^2 - 4it + 4t(1-i) - 2(1-i)\right)dt$$

$$= 2i\left(\frac{8}{3}it^3 - 2it^2 - 2t^2(1-i) - 2(1-i)t\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{4}{3}$$

.8 $\int_C \tan z dz$ $C:$ קשת של פרבולה המחברת את הנקודות $z_1 = 0$ ו- $z_2 = 1+i$

קיים תחום פשוט קשר D המכיל את הנקודות $z_1 = 0$ ו- $z_2 = 1+i$ שבו הפונקציה

$f(z) = \tan z$ אנליטית $\Leftarrow$ $\int_C \tan z dz = \int_0^{1+i} \tan z dz = F(1+i) - F(0)$

כאשר $F'(z) = \tan z$ ב D

$$\int_0^{1+i} \tan z dz = \int_0^{1+i} \frac{\sin z}{\cos z} dz = \begin{Bmatrix} \cos z = t \\ -\sin z dz = dt \end{Bmatrix}$$

$$= -\int_1^{\cos(1+i)} \frac{1}{t} dt = -\ln t\Big|_1^{\cos(1+i)} = -\ln\left(\cos(1+i)\right)$$