תרגיל 10

1. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) לכל למרחב טופולוגי יש בסיס.

(ב) אם B_1 בסיס לטופולוגיה τ על X, וB_2 הוא אוסף של קבוצות פתוחות כך ש$B_1 \subseteq B_2$, אז B_2 בסיס לτ.

(ג) יהיו τ_1 וτ_2 טופולוגיות על X, וB_1 בסיס לτ_1, אז $\tau_1 \subseteq \tau_2 \iff B_1 \subseteq \tau_2$.

2. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) יהיו F_1 וF_2 קבוצות סגורות בX_1 וX_2 בהתאמה. הוכיחו ש$F_1 \times F_2$ סגורה ב$X_1 \times X_2$.

(ב) יהיו $A \subseteq X_1$ ו$B \subseteq X_2$. הוכיחו ש $\bar{A} \times \bar{B} = \overline{A \times B}$.

(ג) יהיו X וY שני מרחבים טופולוגיים עם הטופולוגיה הקוסופית. הוכיחו/הפריכו: טופולוגיית המכפלה על $X \times Y$ היא הטופולוגיה הקוסופית.

3. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) יהיה X מרחב טופולוגי. נגדיר את האלכסון להיות $\Delta = \{(x,x) \forall x \in X\} \subseteq X^2$. הוכיחו שאם האלכסון סגור בX^2, אז X האוסדורף.

(ב) מצאו דוגמא למרחב טופולוגי X עם קבוצה צפופה $A \subseteq X$ ושתי פונקציות רציפות שונות $f, g : X \to X$ המתלכדות על A.

4. יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים. הוכיחו ש $X \times Y \cong Y \times X$.

5. תהי $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ קבוצה, ונגדיר עליה שני אוספים של תתי קבוצות:

$$B_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}...\}, B_2 = \{Z \subseteq X : \exists n : X \setminus Z = \{1, ...n\}\}$$

(א) הוכיחו ש$B_1 \cup B_2$ מהווה בסיס לטופולוגיה כלשהי τ על X.

(ב) הוכיחו ש(X,τ) הוא האוסדורף.

6. תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה והפיכה. הוכיחו שf הומיאומורפיזם.
הדרכה אפשרית:

(א) יהי $a < b \in \mathbb{R}$. הוכיחו שקיימים $c < d \in \mathbb{R}$ כך ש $f[a,b] = [c,d]$.

(ב) הראו בנוסף ש $f(a) = c$ ו$f(b) = d$, או להיפך. כלומר, f מעבירה את השפה לשפה.

(ג) הסיקו שf פתוחה ולכן הומיאומורפיזם.

7. ענו על הסעיפים הבאים:

(א) הוכיחו/הפריכו: לישר של סורגנפריי יש בסיס שמורכב מקבוצות סגוחות.

(ב) הוכיחו ש $\{B_{d_5}(a, \frac{1}{5^n}), a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ מהווה בסיס למרחב המטרי $(\mathbb{Z}, d_5)$.