פתרון תרגיל בית 7, זהבית צבי

1. חשבו את אורכה של כל אחת מהעקומות הבאות הנתונות באמצעות פרמטריזציה (הניחו שהן בעלות אורך):

א. $\gamma(t)=\left(r\cos t, r\sin t\right)$ כאשר $r>0$ ו- $t\in\left[0,2\pi\right]$

ב. $\gamma(t)=\left(a\left(t-\sin t\right), a\left(1-\cos t\right)\right)$ כאשר $a>0$ רדיוס ו- $t\in\left(0,2\pi\right)$

ג. $\gamma(t)=\left(t^2,t^3\right)$ כאשר $t\in\left[1,2\right]$

ד. $\gamma(t)=\left(e^{kt}\cos t, e^{kt}\sin t\right)$ כאשר $k>0$ ו- $t\in\left[0,2\pi\right]$

פתרון

א. $\gamma(t)=\left(r\cos t, r\sin t\right)$ כאשר $r>0$ ו- $t\in\left[0,2\pi\right]$

רכיבי הפרמטריזציה הם פונקציות אלמנטריות לכן גזירות אינסוף פעמים ובפרט פעמיים לכן גזירה ברציפות. הפונקציות $\sin t$ ו- $\cos t$ לא יכולות להתאפס יחד ולכן $\gamma'(t)=\left(-r\sin t, r\cos t\right)$ שאינו אפס לכל $t\in\left[0,2\pi\right]$

לכן לפי הגדרה העקומה חלקה וניתן לחשב את האורך באמצעות הנוסחה $L=\int_a^b\left\|\gamma'(t)\right\|dt$, $t\in\left[a,b\right]$.

הווקטור המשיק:

$$\gamma'(t)=\left(-r\sin t, r\cos t\right)$$

נחשב את הנורמה (האורך) של הווקטור המשיק:

$$\left\|\gamma'(t)\right\|=\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}=\sqrt{r^2\underbrace{\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)}_{1}}=r$$

לכן:

$$L=\int_0^{2\pi}\left\|\gamma'(t)\right\|dt=\int_0^{2\pi}r\,dt=rt\Big|_0^{2\pi}=r\left(2\pi-0\right)=2\pi r$$

העקומה שחישבנו את אורכה היא מעגל שמרכזו בראשית הצירים $\left(0,0\right)$ ורדיוסו r.
ואכן היקף מעגל שווה ל $2\pi r$ לפי נוסחה בתיכון וקיבלנו את הדרוש.

ב. $\gamma(t)=\left(a\left(t-\sin t\right), a\left(1-\cos t\right)\right)$ כאשר $a>0$ רדיוס ו- $t\in\left(0,2\pi\right)$

רכיבי הפרמטריזציה הם פונקציות אלמנטריות לכן גזירות אינסוף פעמים ובפרט פעמיים לכן גזירה ברציפות. הפונקציות $sint$ ו- $cost$ לא יכולות להתאפס יחד ולכן $\gamma'(t)=(a(1-cost),asint)$ אינו ווקטור האפס לכל $t\in\left(0,2\pi\right)$.

לכן לפי הגדרה העקומה חלקה וניתן לחשב את האורך באמצעות הנוסחה $L=\int_a^b\left\|\gamma'(t)\right\|dt$,

$t\in\left[a,b\right]$. כאן $t\in\left(a,b\right)$, 2 הנקודות לא משפיעות על חישוב האינטגרל.

נגזור ונקבל את הווקטור המשיק:

$$\gamma'(t) = (a(1-cost), asint)$$

נחשב את הנורמה (האורך) של הווקטור המשיק:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2(1-cost)^2 + a^2sin^2t}$$

$$= \sqrt{a^2\left[1 - 2cost + \underbrace{cos^2t + sin^2t}_{=1}\right]} = a\sqrt{2(1-cost)}$$

נשתמש בזהות:

$$cos2\alpha = 1 - 2sin^2\alpha$$

נעביר אגפים:

$$2sin^2\alpha = 1 - cos2\alpha$$

נציב $\alpha = \frac{t}{2}$ ונקבל:

$$2sin^2\frac{t}{2} = 1 - cost$$

לכן:

$$\|\gamma'(t)\| = a\sqrt{2(1-cost)} = a\sqrt{2\cdot 2sin^2\frac{t}{2}} = a\sqrt{4sin^2\frac{t}{2}} = 2a\left|sin\frac{t}{2}\right|$$

נציב בנוסחת האורך ונקבל:

$$L = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|dt = 2a\int_0^{2\pi} \left|sin\frac{t}{2}\right| dt$$

רוצים להוציא את הערך המוחלט. נשים לב ש- $sin\frac{t}{2}$ בקטע $(0,2\pi)$ חיובית. כאשר $t = 0$ נקבל $sin0 = 0$ וכאשר $t = 2\pi$ נקבל $sin\pi = 0$.

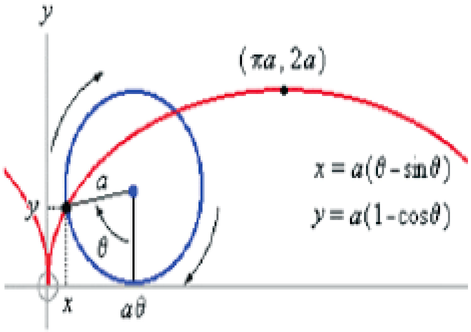
כעת, אם הפונקציה מוגדרת ורציפה בקטע הפתוח (a,b) והגבולות החד-צדדים $\lim_{t\to a^+} f(t)$ ו- $\lim_{t\to b^-} f(t)$ קימים וסופים, אז האינטגרל של f בקטע הפתוח (a,b) שווה לאינטגרל שלה בקטע הסגור $[a,b]$.

לכן, ניתן להוריד את הערך המוחלט ונקבל:

$$L = 2a\int_0^{2\pi} \left|sin\frac{t}{2}\right| dt = 2a\int_0^{2\pi} sin\frac{t}{2}dt = 2a\left(-\frac{cos\frac{t}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= 2a\left(-\frac{cos\pi}{\frac{1}{2}}-\left(-\frac{cos0}{\frac{1}{2}}\right)\right)=2a\left(-\frac{-1}{\frac{1}{2}}-\left(-\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)\right)=2a(2+2)=8a$$

העקומה שחישבנו את אורכה כאן נקראת ציקלואידה, והיא מתארת את מסלולה של נקודה קבועה על גבי מעגל ברדיוס a המתגלגל (ללא החלקה) על קו ישר.



קישור לאנימציה של יצירת ציקלואידה:

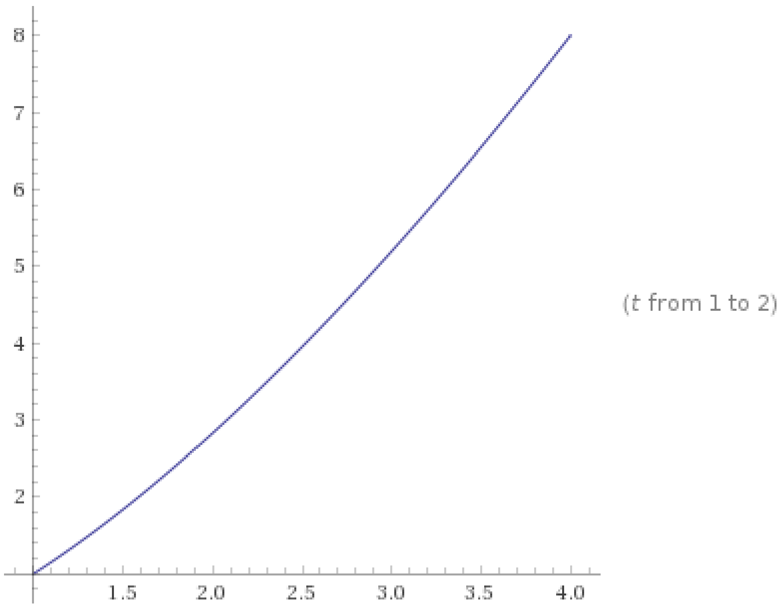
https://he.wikipedia.org/wiki/%D7%A7%D7%95%D7%91%D7%A5:Cycloid_f.gif

ג. $\gamma(t)=\left(t^2,t^3\right)$ כאשר $t\in[1,2]$

רכיבי הפרמטריזציה הם פולינומים ולכן גזירים אינסוף פעמים ובפרט פעמיים, לכן גזירים ברציפות.

הווקטור $\gamma'(t)=\left(2t,3t^2\right)$ אינו אפס עבור $t\in[1,2]$ ולכן לפי הגדרה העקומה חלקה וניתן לחשב את אורכה באמצעות הנוסחה $L=\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt$, $t\in[a,b]$.

העקומה:



מכוון ש- $t^3=\left(t^2\right)^{3/2}$ זה גרף של $y=x^{3/2}$.

הווקטור המשיק:

$$\gamma'(t)=\left(2t,3t^2\right)$$

נחשב את הנורמה (האורך) של הווקטור המשיק:

$$\left\|\gamma'(t)\right\|=\sqrt{4t^2+9t^4}=\sqrt{t^2\left(4+9t^2\right)}=t\sqrt{4+9t^2}$$

לכן:

$$u=\sqrt{4+9t^2}:t=1\rightarrow u=\sqrt{13}\,,\,t=2\rightarrow u=\sqrt{40}$$

נבצע את ההצבה ונקבל:

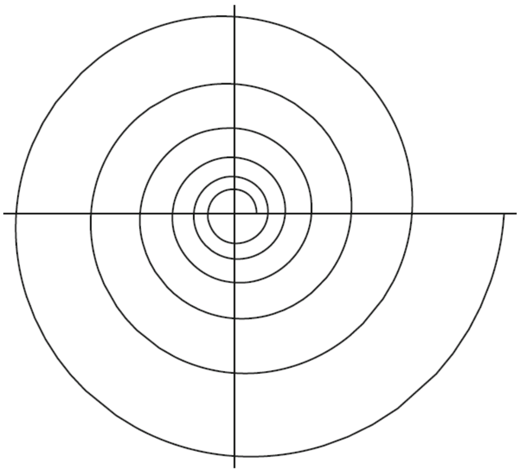
$$\Rightarrow u^2=4+9t^2\Rightarrow 2udu=18tdt\Rightarrow tdt=\frac{1}{9}udu$$

$$L=\int_1^2\left\|\gamma'(t)\right\|dt=\int_1^2 t\sqrt{4+9t^2}\,dt=\frac{1}{9}\int_{\sqrt{13}}^{\sqrt{40}}\underset{u^2}{u\cdot u}\,du=\frac{1}{9}\frac{u^3}{3}\Bigg|_{\sqrt{13}}^{\sqrt{40}}=\frac{1}{27}\left[\left(\sqrt{40}\right)^3-\left(\sqrt{13}\right)^3\right]$$

ד. $\gamma(t)=\left(e^{kt}\cos t,e^{kt}\sin t\right)$ כאשר $k>0$ ו- $t\in\left[0,2\pi\right]$

זו עקומה הנקראת ספירלה לוגריתמית.

העקומה:



רכיבי הפרמטריזציה הם פונקציות אלמנטריות לכן גזירות אינסוף פעמים ובפרט פעמיים לכן גזירה ברציפות. הפונקציות $\sin t$ ו- $\cos t$ לא יכולות להתאפס יחד ונתון גם $k>0$ ולכן $\gamma'(t)=\left(ke^{kt}\cos t-e^{kt}\sin t,ke^{kt}\sin t+e^{kt}\cos t\right)$ שאינו אפס לכל $t\in\left[0,2\pi\right]$, כוון שהרכיב הראשון של $\gamma'(t)$ אינו מתאפס, הרי

$$ke^{kt}\cos t-e^{kt}\sin t=0\Rightarrow k\cos t-\sin t=0\Rightarrow\tan t=k\Rightarrow t=\arctan k+\pi n$$

שונה מאפס כי $k>0$,

$$k=0\Leftrightarrow\arctan k=0$$

לכן לפי הגדרה העקומה חלקה ולכן ניתן לחשב את האורך באמצעות הנוסחה $L=\int_a^b\left\|\gamma'(t)\right\|dt$,

$t\in\left[a,b\right]$.

הווקטור המשיק:

$$\gamma'(t)=\left(ke^{kt}\cos t-e^{kt}\sin t,ke^{kt}\sin t+e^{kt}\cos t\right)=\left(e^{kt}\left(k\cos t-\sin t\right),e^{kt}\left(k\sin t+\cos t\right)\right)$$

נחשב את הנורמה (האורך) של הווקטור המשיק:

$$\left\|\gamma'(t)\right\|=\sqrt{\left[e^{kt}\left(k\cos t-\sin t\right)\right]^2+\left[e^{kt}\left(k\sin t+\cos t\right)\right]^2}=\sqrt{\left(e^{kt}\right)^2\left(k\cos t-\sin t\right)^2+\left(e^{kt}\right)^2\left(k\sin t+\cos t\right)^2}$$

צבי זהבית

$$=\sqrt{\left(e^{kt}\right)^2\left[\left(k\cos t-\sin t\right)^2+\left(k\sin t+\cos t\right)^2\right]}$$

$$=e^{kt}\sqrt{k^2\cos^2 t\cancel{-2k\cos t\sin t}+\sin^2 t+k^2\sin^2 t\cancel{+2k\sin t\cos t}+\cos^2 t}=e^{kt}\sqrt{k^2\left(\underbrace{\cos^2 t+\sin^2 t}_{=1}\right)+\left(\underbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}_{=1}\right)}$$

$$=e^{kt}\sqrt{k^2+1}$$

קיבלנו:

$$\left\|\gamma'(t)\right\|=e^{kt}\sqrt{k^2+1}$$

לכן:

$$L=\int_0^{2\pi}\left\|\gamma'(t)\right\|dt=\int_0^{2\pi}e^{kt}\overbrace{\sqrt{k^2+1}}^{const}dt=\sqrt{k^2+1}\,\frac{e^{kt}}{k}\bigg|_0^{2\pi}=\frac{\sqrt{k^2+1}}{k}\left(e^{2\pi k}-1\right)$$

2. מצאו פרמטריזציה טבעית לעקומות הבאות:

א. $\gamma(t)=\left(1+2\cos t,-3+2\sin t\right)$

ב. $\gamma(t)=\left(r\cos t,r\sin t\right)$ כאשר $r>0$

<u>פתרון</u>

א. $\gamma(t)=\left(1+2\cos t,-3+2\sin t\right)$

רכיבי הפרמטריזציה הם פונקציות אלמנטריות לכן גזירות אינסוף פעמים ובפרט פעמיים לכן גזירה ברציפות. הפונקציות $\sin t$ ו- $\cos t$ לא יכולות להתאפס יחד. לכן $\gamma'(t)=\left(-2\sin t,2\cos t\right)$ שונה מאפס לכל t וניתן לחשב פרמטריזציה טבעית לפי הנוסחה.

הווקטור המשיק:

$$\gamma'(t)=\left(-2\sin t,2\cos t\right)$$

$$\left\|\gamma'(t)\right\|=\sqrt{\left(-2\sin t\right)^2+\left(2\cos t\right)^2}=\sqrt{4\left(\underbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}_{=1}\right)}=2$$

לכן:

$$s(t)=\int_0^t\left\|\gamma'(x)\right\|dx=\int_0^t 2\,dx=2x\Big|_0^t=2t$$

להביע את t באמצעות s ונקבל:

$$t(s)=\frac{s}{2}$$

זהו הפרמטר הטבעי.
נציב ונקבל את הפרמטריזציה הטבעית:

$$\gamma(s)=\gamma(t(s))=\left(1+2\cos\left(\frac{s}{2}\right),-3+2\sin\left(\frac{s}{2}\right)\right)$$

ניתן לבדוק שאכן מקבלים $\|\gamma'(s)\|=1$.

ב. $\gamma(t)=(r\cos t,r\sin t)$

רכיבי הפרמטריזציה הם פונקציות אלמנטריות לכן גזירות אינסוף פעמים ובפרט פעמים לכן גזירה ברציפות. הפונקציות $\sin t$ ו- $\cos t$ לא יכולות להתאפס יחד ולכן $\gamma'(t)=(-r\sin t,r\cos t)$ שאינו אפס לכל t ולכן ניתן לחשב פרמטריזציה טבעית לפי הנוסחה $s(t)=\int_0^t\|\gamma'(x)\|dx$.

הווקטור המשיק:

$$\gamma'(t)=(-r\sin t,r\cos t)$$

נחשב את הנורמה (האורך) של הווקטור המשיק:

$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}=\sqrt{r^2\underbrace{\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)}_{1}}=r$$

אם $r=1$ מקבלים $\|\gamma'(t)\|=1$ וזו פרמטריזציה טבעית ו- $s=t$.
אם $r\neq 1$ זו פרמטריזציה שאינה טבעית.
נגדיר:

$$s=\int_0^t\|\gamma'(x)\|dx=\int_0^t r\,dx=rx\Big|_0^t=rt$$

נכתוב את t באמצעות s כלומר $t(s)$:

$$t(s)=\frac{s}{r}$$

נציב ונקבל פרמטריזציה טבעית:

$$\gamma(s)=\gamma(t(s))=\gamma\left(\frac{s}{r}\right)=\left(r\cos\frac{s}{r},r\sin\frac{s}{r}\right)$$

נבדוק:
הווקטור המשיק הוא:

$$\gamma'(s)=\left(\cancel{r}\left(-\sin\frac{s}{r}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{r}},\cancel{r}\cos\frac{s}{r}\cdot\frac{1}{\cancel{r}}\right)=\left(-\sin\frac{s}{r},\cos\frac{s}{r}\right)$$

ואכן:

$$\|\gamma'(s)\|=\sqrt{\sin^2\frac{s}{r}+\cos^2\frac{s}{r}}=1$$

אכן פרמטריזציה טבעית.

3. חשבו את העקמומיות של העקומות הבאות:

א. $\gamma(t)=(1+2\cos t,-3+2\sin t)$

ב. אליפסה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

ג. פרבולה חצי קובייתית: $x^3-y^2=0$

ד. $\gamma(t)=(r\cos t,r\sin t)$ כאשר $r>0$

ו. $\gamma(t)=(t^2,t^3)$ כאשר $t\in[1,2]$

ז. $\gamma(t)=(e^{kt}\cos t,e^{kt}\sin t)$ כאשר $k>0$ ו- $t\in[0,2\pi]$

<u>פתרון</u>

א. $\gamma(t)=(1+2\cos t,-3+2\sin t)$

נשים לב כי הפרמטריזציה היא:

$$x(t)=1+2\cos t\Rightarrow x-1=2\cos t$$

$$y(t)=-3+2\sin t\Rightarrow y+3=2\sin t$$

לכן, נעלה בריבוע, נחבר ונקבל:

$$(x-1)^2+(y+3)^2=(2\cos t)^2+(2\sin t)^2=4$$

לכן הפרמטריזציה מתארת מעגל מוזז שמרכזו בנקודה $(1,-3)$ ורדיוסו 2.

תחילה נבדוק האם הפרמטריזציה הנתונה היא טבעית בכדי שנדע באיזו נוסחת עקמומיות להשתמש.

בכדי להראות פרמטריזציה טבעית צריך להראות ש-

$$\|\gamma'(t)\|=1$$

נחשב זאת:

$$\gamma'(t)=(-2\sin t,2\cos t)$$

$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t}\underset{\sin^2 t+\cos^2 t=1}{=}\sqrt{4}=2\neq 1$$

לכן הפרמטריזציה אינה טבעית.

נחשב את העקמומיות לפי הנוסחה:

$$\kappa=\frac{\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{\gamma'(t)} & \overrightarrow{\gamma''(t)}\end{pmatrix}}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

קיבלנו קודם:

$$\gamma'(t)=(-2\sin t,2\cos t)$$

נגזור שוב ונקבל:

$$\gamma''(t)=(-2\cos t,-2\sin t)$$

נציב בנוסחה עבור העקמומיות ונקבל:

$$\kappa=\frac{\det\begin{pmatrix}-2\sin t & -2\cos t\\ 2\cos t & -2\sin t\end{pmatrix}}{\|2\|^3}=\frac{4\sin^2 t+4\cos^2 t}{8}\underset{\sin^2 t+\cos^2 t=1}{=}\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

ב. אליפסה : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

בסעיף זה נשתמש בהגדרה סתומה של העקומה.
ניתן גם לעשות פרמטריזציה לאליפסה ולהמשיך לפי דרך בסעיף א׳. (ראינו פרמטריזציה בהרצאה).

נגדיר : $F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$

נשתמש בנוסחת בייטמן לחישוב הערך המוחלט של העקמומיות :

$$|\kappa|=\frac{\left|F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2\right|}{\left(\sqrt{F_x^2+F_y^2}\right)^3}$$

נחשב את הנגזרות החלקיות :

$$F_x=\frac{2x}{a^2}\,,\,F_y=\frac{2y}{b^2}$$

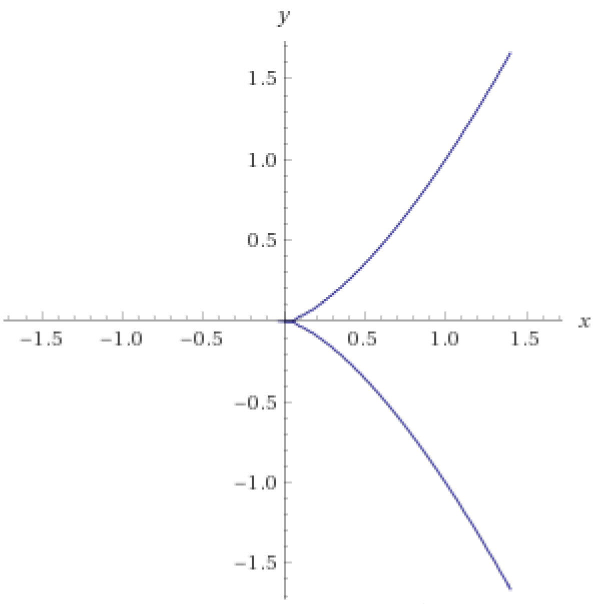
$$F_{xx}=\frac{2}{a^2}\,,\,F_{xy}=0\,,\,F_{yy}=\frac{2}{b^2}$$

נציב בנוסחה ונקבל :

$$|\kappa|=\frac{\left|\frac{2}{a^2}\cdot\left(\frac{2y}{b^2}\right)^2-\cancel{2\cdot 0\cdot F_xF_y}+\frac{2}{b^2}\cdot\left(\frac{2x}{a^2}\right)^2\right|}{\left(\sqrt{\left(\frac{2x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{2y}{b^2}\right)^2}\right)^3}=\frac{\left|\frac{2}{a^2}\cdot\frac{4y^2}{b^4}+\frac{2}{b^2}\cdot\frac{4x^2}{a^4}\right|}{\left(\sqrt{\left(\frac{2x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{2y}{b^2}\right)^2}\right)^3}=\frac{\frac{8}{a^2b^2}\underbrace{\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}\right)}_{=1}}{\left(\sqrt{\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}}\right)^3}$$

$$=\frac{\frac{8}{a^2b^2}}{\left(2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}\right)^3}=\frac{\cancel{8}}{\cancel{8}a^2b^2\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}\right)^3}=\frac{1}{a^2b^2\left(\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}}\right)^3}$$

ג. פרבולה חצי קובייתית : $x^3-y^2=0$
העקומה :



בסעיף זה נשתמש בהגדרה סתומה של העקומה.

נגדיר: $F(x,y)=x^3-y^2=0$

נשתמש בנוסחת בייטמן לחישוב הערך המוחלט של העקמומיות:

$$|\kappa|=\frac{\left|F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2\right|}{\left(\sqrt{F_x^2+F_y^2}\right)^3}$$

נחשב את הנגזרות החלקיות:

$$F_x=3x^2\,,\;F_y=-2y$$

$$F_{xx}=6x\,,\;F_{xy}=0\,,\;F_{yy}=-2$$

נציב בנוסחה ונקבל:

$$|\kappa|=\frac{\left|6x\cdot(-2y)^2-\cancel{2\cdot 0\cdot F_xF_y}-2\cdot\left(3x^2\right)^2\right|}{\left(\sqrt{\left(3x^2\right)^2+(-2y)^2}\right)^3}=\frac{\left|24xy^2-18x^4\right|}{\left(\sqrt{9x^4+4y^2}\right)^3}$$

ד. בתרגיל הקודם ראינו פרמטריזציה טבעית למעגל:

$$\gamma(s)=\left(r\cos\frac{s}{r},r\sin\frac{s}{r}\right)$$

לכן נחשב את העקמומיות לפי הנוסחה:

$$\kappa(s)=\left\|\gamma''(s)\right\|$$

נגזור פעמים את הפרמטריזציה:

$$\gamma'(s)=\left(\cancel{r}\left(-\sin\frac{s}{r}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{r}},\cancel{r}\cos\frac{s}{r}\cdot\frac{1}{\cancel{r}}\right)=\left(-\sin\frac{s}{r},\cos\frac{s}{r}\right)$$

צבי זהבית

$$\gamma''(s)=\left(\left(-\cos\frac{s}{r}\right)\cdot\frac{1}{r},\left(-\sin\frac{s}{r}\right)\cdot\frac{1}{r}\right)=\left(-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r},-\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}\right)$$

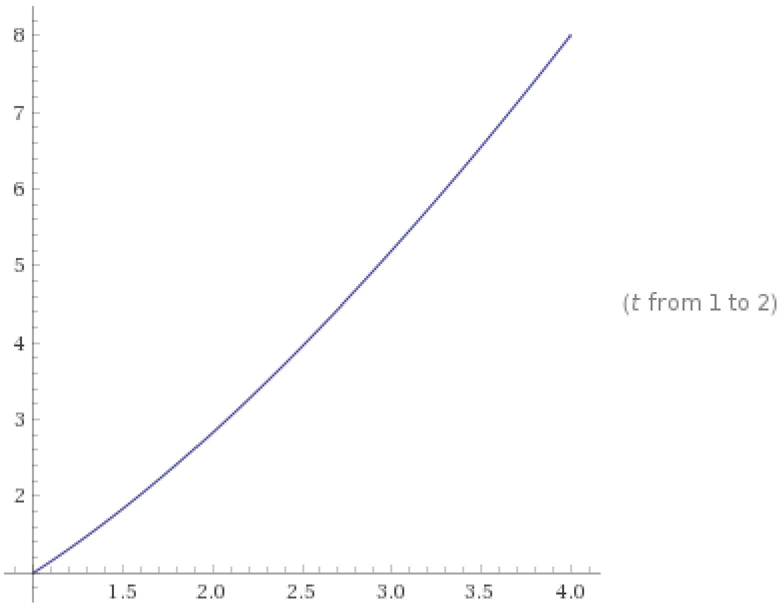
לכן העקמומיות היא:

$$\left\|\gamma''(s)\right\|=\sqrt{\left(-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}\right)^2+\left(-\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{r^2}\cos^2\frac{s}{r}+\frac{1}{r^2}\sin^2\frac{s}{r}}=\frac{1}{r}$$

וקיבלנו תשובה בדיוק כמו שהגדרנו עקמומיות כיחס הפוך של הרדיוס.

ו. $\gamma(t)=\left(t^2,t^3\right)$ כאשר $t\in[1,2]$

בתרגיל קודם ראינו שהעקומה היא הגרף של $y=x^{3/2}$ והאיור שלה הוא:



ראינו גם שזו עקומה חלקה ומצאנו וקטור משיק ואת אורכו:

$$\gamma'(t)=\left(2t,3t^2\right)$$

$$\left\|\gamma'(t)\right\|=t\sqrt{4+9t^2}$$

כוון ש-$\left\|\gamma'(t)\right\|\neq 1$ הפרמטריזציה אינה טבעית ולכן נחשב את העקמומיות שלה לפי הנוסחה:

$$\kappa=\frac{\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{\gamma'(t)} & \overrightarrow{\gamma''(t)}\end{pmatrix}}{\left\|\gamma'(t)\right\|^3}$$

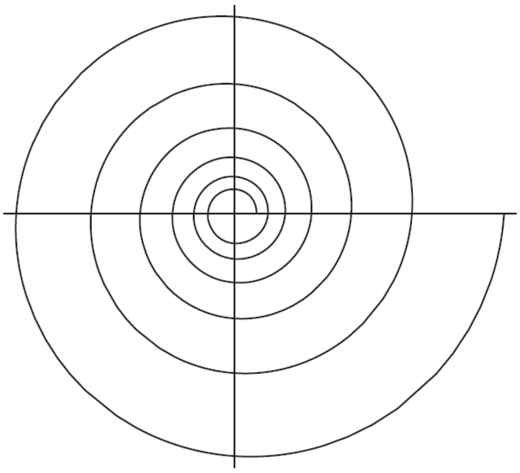
נקבל:

$$\gamma''(t)=(2,6t)$$

נציב בנוסחה עבור העקמומיות ונקבל:

$$\kappa=\frac{\det\begin{pmatrix}2t & 2\\ 3t^2 & 6t\end{pmatrix}}{\left(t\sqrt{4+9t^2}\right)^3}=\frac{12t^2-6t^2}{\left(t\sqrt{4+9t^2}\right)^3}=\frac{6\cancel{t^2}}{\cancel{t^3}_{t^{3-2}}\sqrt{\left(4+9t^2\right)^3}}=\frac{6}{t\sqrt{\left(4+9t^2\right)^3}}$$

ז. $\gamma(t)=\left(e^{kt}\cos t, e^{kt}\sin t\right)$ כאשר $k>0$ ו- $t\in[0,2\pi]$
זו ספירלה לוגריתמית שראינו בתרגיל קודם.
האיור שלה:



ראינו גם שזו עקומה חלקה ומצאנו ווקטור משיק ואת אורכו:

$$\gamma'(t)=\left(e^{kt}\left(k\cos t-\sin t\right), e^{kt}\left(k\sin t+\cos t\right)\right)$$

$$\left\|\gamma'(t)\right\|=e^{kt}\sqrt{k^2+1}$$

כוון ש- $\left\|\gamma'(t)\right\|\neq 1$ הפרמטריזציה אינה טבעית ולכן נחשב את העקמומיות שלה לפי הנוסחה:

$$\kappa=\frac{\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{\gamma'(t)} & \overrightarrow{\gamma''(t)}\end{pmatrix}}{\left\|\gamma'(t)\right\|^3}$$

נקבל:

$$\gamma''(t)=\left(ke^{kt}\left(k\cos t-\sin t\right)+e^{kt}\left(-k\sin t-\cos t\right), ke^{kt}\left(k\sin t+\cos t\right)+e^{kt}\left(k\cos t-\sin t\right)\right)$$

$$\gamma''(t)=\left(e^{kt}\left(k^2\cos t-k\sin t-k\sin t-\cos t\right), e^{kt}\left(k^2\sin t+k\cos t+k\cos t-\sin t\right)\right)$$

$$\gamma''(t)=(e^{kt}[(k^2-1)cost-2ksint], e^{kt}[(k^2-1)sint+2kcost])$$

נציב בנוסחה עבור העקמומיות ונקבל:

$$\kappa=\frac{det\begin{pmatrix}e^{kt}(kcost-sint) & e^{kt}[(k^2-1)cost-2ksint]\\ e^{kt}(ksint+cost) & e^{kt}[(k^2-1)sint+2kcost]\end{pmatrix}}{\left(e^{kt}\sqrt{k^2+1}\right)^3}$$

$$\kappa=\frac{e^{2kt}\{(kcost-sint)[(k^2-1)sint+2kcost]-(ksint+cost)[(k^2-1)cost-2ksint]\}}{e^{3kt-2kt}\sqrt{(k^2+1)^3}}$$

$$\kappa = \frac{(k^3-k)costsint + 2k^2cos^2t - (k^2-1)sin^2t - 2kcostsint}{e^{kt}\sqrt{(k^2+1)^3}}$$

$$-\frac{(k^3-k)sintcost - 2k^2sin^2t + (k^2-1)cos^2t - 2kcostsint}{e^{kt}\sqrt{(k^2+1)^3}}$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{2k^2\left(\underbrace{cos^2t+sin^2t}_{1}\right)-(k^2-1)\left(\underbrace{sin^2t+cos^2t}_{1}\right)}{e^{kt}\sqrt{(k^2+1)^3}} = \frac{2k^2-(k^2-1)}{e^{kt}\sqrt{(k^2+1)^3}} = \frac{k^2+1}{e^{kt}\sqrt{(k^2+1)^3}}$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{\sqrt{(k^2+1)^2}}{e^{kt}\sqrt{(k^2+1)^3}} = \frac{\sqrt{\frac{(k^2+1)^2}{(k^2+1)^3}}}{e^{kt}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{k^2+1}}}{e^{kt}} = \frac{1}{e^{kt}\sqrt{k^2+1}}$$