תורת הגרפים - הרצאה 3

20 בנובמבר 2011

הגדרה

שני גרפים $G^1 = (V^1, E^1)$ ו$G^2 = (V^2, E^2)$ נקראים איזומורפיים אם קיימת העתקה חח"ע ועל $\varphi : V^1 \to V^2$ כך שלכל $u, v \in V^1$ מתקיים:

$$(u, v) \in E^1 \iff (\varphi(u), \varphi(v)) \in E^2$$

ז.א קיימת העתקה חח"ע ועל מקב' קדקדים של גרף אחד לקב' קדקדים של גרף שני השומרת צלעות.
נסמן: $G^1 \cong G^2$.

טענה

אם $G \cong H$ גרפים איזומורפיים אזי:

1. סדרם שווה.
2. מס' הצלעות שווה.
3. מס' רכיבי קשירות שווה.
4. וקטור דרגות (כלומר, סדרה של כל דרגות הקדקדים בסדר יורד חלש) שווה.
בפרט, $\Delta(G) = \Delta(H)$ ו$\delta(G) = \delta(H)$.

שימו לב שתנאים אלו לא מספיקים.

הגדרה

יהי G גרף, $u, v \in V(G)$.
המרחק $\mathrm{dist}_G(u, v)$ הוא המינימום של אורך מסילה מu לv.

הגדרה

הקוטר של גרף G הוא:

$$\mathrm{Diameter}(G) = \max\{\mathrm{dist}_G(u, v) \ : \ u, v \in V(G)\}$$

תוספת לטענה

בגרפים איזומורפיים מתקיים גם:

$$\mathrm{Diameter}(G) = \mathrm{Diameter}(H)$$

טענה

$$G \cong H \iff \bar{G} \cong \bar{H}$$

גרפים מסומנים

גרף מסומן מסדר n הוא גרף שקבוצת קדקדיו היא $\{v_1, ..., v_n\}$.
השאלה האם שני גרפים מסומנים זהים היא קלה.

ספירת עצים

1. כמה עצים יש מסדר n? אינסוף.
2. כמה עצים יש מסדר n עד כדי איזומורפיזם?

מס' העצים	n
1	1
1	2
1	3
2	4

באופן כללי, לא ידועה תשובה אלגנטית.

3. כמה עצים מסומנים מסדר n יש?

מס' העצים	n
1	1
1	2
3	3
16	4

משפט קיילי

מס' העצים המסומנים מסדר n הוא n^{n-2}.

הערה היסטורית

1. קיילי ספר פחמימות.
2. יש ספר הוכחות למשפט קיילי - Counting labelled trees (למעלה מ20 הוכחות).
3. בספר proof from THE BOOK יש פרק של הוכחות של משפט קיילי.

בקורס זה נביא 3 הוכחות שונות למשפט (אחת בסוף הקורס).

הוכחה ראשונה

נסמן $T(n)$ = מספר העצים המסומנים מסדר n.
$T(n, k)$ = מס' העצים המסומנים מסדר n בהם דרגת v_1 היא k.

עובדה 1

$$T(n, n-1) = 1$$

עובדה 2

$$\sum_{k=1}^{n-1} T(n, k) = T(n)$$

מטרה: למצוא נוסחת נסיגה ל$T(n, k)$.
נספור "זוגות מן השמיים" של עצים מסומנים מסדר n, שהגדרתם:
(T^1, T^2) זוג סדור של עצים מסומנים מסדר n הוא "זוג מן השמיים" אם דרגת v_1 בT^1 היא k, דרגת v_1 בT^2 היא $k+1$ וגם:

$$E(T^1) \Delta E(T^2) = E(T^1) \cup E(T^2) \backslash E(T^1) \cap E(T^2)$$

הן 2 צלעות עם קדקד משותף.
במילים אחרות, $T1$ מתקבל מ-T^2 ע"י השמטת צלע $(u,\, v_1)$ והוספת צלע $(u,\, w)$ עבור w כלשהו.
נספור בשתי דרכים שונות.

דרך ראשונה לספור

נבחר את T^1 - עץ מסומן עם $\deg\left(v_1\right) = k$.
נשמיט צלע שלא חלה ב-v_1 - $(v_i,\, v_j)$.
ב.ה.כ $v_i,\, v_j$ לא ברכיב של v_1.
נוסיף את הצלע $(v_1,\, v_j)$.
ניתן לראות שכל זוג מן השמיים מתקבל בצורה כזו ובאופן יחיד.
מסקנה - מס' הזוגות מן השמיים הוא

$$T\left(n,\, k\right) \cdot \left(n - 1 - k\right)$$

דרך שניה לספור

1. נבחר T^2, עץ מסומן מסדר n כך ש-$\deg\left(v_1\right) = k + 1$.
2. נשמיט צלע שחלה ב-v_1.
   דיון - ב.ה.כ שכני v_1 הם $w_1,\, ...,\, w_{k+1}$.
   אם נתבונן ב-$T^2 \backslash v_1$ נקבל יער עם $k+1$ רכיבי קשירות. נסמנם $S^1,\, ...,\, S^{k+1}$.
   מס' הקדקדים ב-S^i יסומן n_i.

$$\sum_{i=1}^{k+1} n_i = n - 1$$

3. אם השמטנו את $(v_1,\, w_i)$ אז נוסיף את $(w_i,\, x)$ כאשר $x \in V\left(T^2\right) \setminus \left(v_1 \cup S^i\right)$.

מס' האפשרויות בשלב 3 הוא $n - n_i - 1$.
מס' האפשרויות בשלב 2+3 הוא

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} \left(n - n_i - 1\right) &= \left(k+1\right)\left(n-1\right) - \sum_{i=1}^{k+1} n_i \\
&= \left(k+1\right)\left(n-1\right) - \left(n-1\right) = k\left(n-1\right)
\end{aligned}$$

וזה לא תלוי בעץ T^2!
לכן מס' הזוגות מן השמיים הכולל הוא

$$T\left(n,\, k+1\right) \cdot k\left(n-1\right)$$

מסקנה

מהשוואת שתי הספירות נקבל:

$$\begin{aligned}
T\left(n,\, k\right) \cdot \left(n - k - 1\right) &= T\left(n,\, k+1\right) \cdot k\left(n-1\right) \\
T\left(n,\, k\right) &= \frac{k}{n-k-1} \cdot \left(n-1\right) T\left(n,\, k+1\right)
\end{aligned}$$

תזכורת

לפי עובדה 1, $T\left(n,\, n-1\right)=1$.

$$\begin{aligned}
T\left(n,\, k\right) & = \frac{k\left(n-1\right)}{n-k-1}T\left(n,\, k+1\right)\\
 & = \frac{k\left(n-1\right)}{n-k-1}\cdot\frac{\left(k+1\right)\left(n-1\right)}{\left(n-k-2\right)}T\left(n,\, k+2\right)\\
 & = \frac{k\left(n-1\right)}{n-k-1}\cdot\frac{\left(k+1\right)\left(n-1\right)}{\left(n-k-2\right)}\cdot\frac{\left(k+2\right)\left(n-1\right)}{\left(n-k-3\right)}...\frac{\left(n-2\right)\left(n-1\right)}{\left(n-n+2-1\right)}T\left(n,\, n-1\right)\\
 & = \frac{\frac{\left(n-2\right)!}{\left(k-1\right)!}\cdot\left(n-1\right)^{n-1-k}}{\left(n-k-1\right)!}=\frac{\left(n-2\right)!}{\left(n-k-1\right)!\cdot\left(k-1\right)!}\left(n-1\right)^{n-1-k}\\
 & = \binom{n-2}{k-1}\cdot\left(n-1\right)^{n-1-k}
\end{aligned}$$

נציב בעובדה 2:

$$\begin{aligned}
T\left(n\right) & = \sum_{k=1}^{n-1}T\left(n,\, k\right)=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}\left(n-1\right)^{n-1-k}\\
\left[t\right. & = \left.k-1\right]\\
 & = \sum_{t=0}^{n-2}\binom{n-2}{t}\left(n-1\right)^{n-2-t}=\left(\left(n-1\right)+1\right)^{n-2}=n^{n-2}
\end{aligned}$$

הכנות להוכחה השניה

טענה 1

גרף קשיר מסדר n ומספר צלעות n מכיל מעגל אחד בדיוק.

תזכורת

גרף קשיר מסדר n עם $n-1$ צלעות הוא עץ.

הוכחת טענה 1

הגרף הנ"ל אינו עץ (אחרת, מס' צלעותיו $n-1$). לכן, יש בו מעגל.
כעת, מכיוון שאינו עץ, אינו קשיר מינימלי ולכן יש צלע $e\in E$ כך ש$G\backslash e$ קשיר. לפי התזכורת, $G\backslash e$ עץ.
לכן, כל מעגל מכיל את e. אם יש שני מעגלים שמכילים את e, אז יש מעגל שלא מכיל את e, ואז $G\backslash e$ לא עץ, סתירה.

מסקנה

גרף קשיר מסדר n ומידה n הוא מעגל יחיד שמקדקדיו משתרשים עצים.

הגדרה

יהי $G=\left(V,\, E\right)$ גרף מכוון.
דרגה יוצאת של קדקד $v\in V$ היא:

$$d_{G}^{+}\left(v\right)=\left|\left\{ \left(v,\, u\right)\;:\; u\in V\right\} \right|$$

דרגה נכנסת של קדקד $v\in V$ היא:

$$d_{G}^{-}=\left|\left\{ \left(u,\, v\right)\;:\; u\in V\right\} \right|$$

גרף מכוון הוא k^{+}-רגולרי אם לכל קדקד v בגרף, $d_{G}^{+}\left(v\right)=k$.

עובדה

יש התאמה חח"ע ועל בין גרפים מכוונים מסומנים 1^{+}-רגולריים לפונק' מ$[n]$ ל$[n]$ (כאשר $[n]=\{1,\,...,\, n\}$).

הגדרה

רכיב קשירות בגרף מכוון מתקבל מהגרף אחרי השמטת ההכוונה.

עובדה

בכל רכיב קשירות של גרף 1^+-רגולרי מס' הצלעות שווה למס' הקדקדים.