חשבון אינפי 1 למדמ"ח

תרגיל 10-פתרון

1. חשבו את הגבולות הבאים (היעזרו בכלל לופיטל) :

א. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+x^{-1}}{1+\sqrt{1-x}}$

הגבול הינו מהצורה "$\frac{\infty}{\infty}$" הנגזרת של המכנה $\left(1+\sqrt{1-x}\right)'=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\neq 0$ עבור $(-\infty,1)$ ולכן נפעיל את כלל לופיטל

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+x^{-1}}{1+\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^{-2}}{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2-1\right)2\sqrt{1-x}}{-x^2}=\lim_{x\to-\infty}2\left(-1+\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{1-x}=-\infty$$

ב. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{e^x-x-1}$

הגבול הינו מהצורה "$\frac{0}{0}$", הנגזרת של המכנה $\left(e^x-x-1\right)'=e^x-1\neq 0$ בסביבה מנוקבת של $x=0$ ולכן נשתמש בכלל לופיטל:

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{e^x-x-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{e^x-1}$ הגבול עדיין מהצורה "$\frac{0}{0}$" ולכן שוב נפעיל את כלל לופיטל:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{e^x-x-1}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{e^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{2}{e^x}=2$$

ג. $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$

הגבול הינו מהצורה "1^∞"

$$y=(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$$

$$\ln y=\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ln(2-x)$$

$$\lim_{x\to1}\ln y=\lim_{x\to1}\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)\ln\left(2-x\right)\overset{\infty\cdot0}{=}\lim_{x\to1}\frac{\ln\left(2-x\right)}{\cot\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1}\frac{\frac{-1}{\left(2-x\right)}}{\frac{1}{-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to1}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{2-x}=\frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to1}\left(2-x\right)^{\tan\frac{\pi}{2}x}=e^{2/\pi}$$

ד. $\lim_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{1/\ln x}$

הגבול הינו מהצורה "∞^0"

$$y=\left(1+x^2\right)^{1/\ln x}$$

$$\ln y=\frac{1}{\ln x}\ln\left(1+x^2\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\ln x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{\left(1+x^2\right)}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to0}+1\right)}=2$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{1/\ln x}=e^2$$

ה. $\lim_{x\to\infty}\left(x-\ln\left(1+2e^x\right)\right)$ רמז: $\left(x-\ln\left(1+2e^x\right)\right)=\ln e^{\left(x-\ln\left(1+2e^x\right)\right)}$

הגבול הינו מהצורה "$\infty-\infty$"

$$y=e^{\left(x-\ln\left(1+2e^x\right)\right)}=\frac{e^x}{1+2e^x}$$

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+2e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2e^x}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\left(x-\ln\left(1+2e^x\right)\right)\overset{\infty-\infty}{=}\ln\frac{1}{2}=-\ln2$$

ו. $\lim_{x\to1}\frac{\sin\left(\pi x\right)\ln x}{1+\cos\left(\pi x\right)}$

הגבול הינו מהצורה "$\frac{0}{0}$" והתנאים של כלל לופיטל מתקיימים ולכן:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sin(\pi x)\ln x}{1+\cos(\pi x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1}\frac{\pi\cos(\pi x)\ln x+\frac{\sin(\pi x)}{x}}{-\pi\sin(\pi x)}=\lim_{x\to1}\frac{\cos(\pi x)\ln x}{-\sin(\pi x)}-\frac{1}{\pi x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-\pi\sin(\pi x)\ln x+\frac{\cos(\pi x)}{x}}{-\pi\cos(\pi x)}-\frac{1}{\pi x}=-\frac{2}{\pi}$$

2. עבור הגבול $\lim_{x\to2^-}\sqrt{6-3x}=0$ מצאו $\delta>0$ ממשי כך שלכל $2-\delta<x<2$ מתקיים $\sqrt{6-3x}<0.01$.

פתרון: $\sqrt{6-3x}<0.01$ אם ורק אם $0<6-3x<10^{-4}$ אם ורק אם $-6<-3x<-6+10^{-4}$ אם ורק אם $2-\frac{10^{-4}}{3}<x<2$ ולכן מספיק לבחור $\delta\le\frac{10^{-4}}{3}$.

3. עבור הגבול $\lim_{x\to1^-}\frac{1}{1-x^2}=\infty$ מצאו $\delta>0$ ממשי כך שלכל $1-\delta<x<1$ מתקיים $\frac{1}{1-x^2}>100$.

פתרון: מאחר ו- x שואף ל-1 משמאל צריך להתקיים

$$\begin{cases}1>100\left(1-x^2\right)\\-1<x<1\end{cases}$$

ומכאן $\begin{cases}x<-\frac{\sqrt{99}}{10}\\-1<x<1\end{cases}$ or $\begin{cases}x>\frac{\sqrt{99}}{10}\\-1<x<1\end{cases}$ והפתרון המתאים במקרה זה הוא

$\frac{\sqrt{99}}{10}<x<1$ כלומר $1-\left(1-\frac{\sqrt{99}}{10}\right)<x<1$ ולכן מספיק לבחור $\delta\le\left(1-\frac{\sqrt{99}}{10}\right)$.

4. השתמשו בהגדרת הגבול במונחים של ε,δ על מנת להוכיח ש- $\lim_{x\to1}\frac{13x-1}{6x}=2$.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$ ממשי. צריך למצוא $\delta>0$ ממשי כך שלכל x המקיים $|x-1|<\delta$ מתקיים $\left|\frac{13x-1}{6x}-2\right|<\varepsilon$.

$$\left|\frac{13x-1-12x}{6x}\right|=\left|\frac{x-1}{6x}\right|$$

ניקח $\delta=\frac{1}{2}$

במקרה זה $|x-1|<\frac{1}{2}$ כלומר $-\frac{1}{2}<x-1<\frac{1}{2}$ ולכן $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$ ומכאן $2>\frac{1}{x}>\frac{2}{3}$.

ולכן $\varepsilon \le \frac{\delta}{3}=\frac{1}{6}\cdot 2\delta > \frac{1}{6}|x-1|\cdot\frac{1}{|x|}=\left|\frac{x-1}{6x}\right|=\left|\frac{13x-1-12x}{6x}\right|$ כלומר $\delta<3\varepsilon$

לסיכום מספיק לבחור $\delta \le \min\left\{\frac{1}{2},3\varepsilon\right\}$ ממשי.

5. השתמשו בהגדרת הגבול במונחים של A,δ על מנת להוכיח ש- $\lim_{x\to 3^+}\frac{2}{\sqrt{x-3}}=\infty$.

הוכחה: יהי $A>0$ ממשי צריך למצוא $\delta>0$ ממשי כך שלכל x המקיים $3<x<3+\delta$ מתקיים $\frac{2}{\sqrt{x-3}}>A$.

$\frac{2}{\sqrt{x-3}}>A$ אם ורק אם $2>A\sqrt{x-3}$ אם ורק אם $4>A^2x-3A^2$ ו-$x>3$ אם ורק אם

$3+\frac{4}{A^2}=\frac{4+3A^2}{A^2}>x$ ו-$x>3$ כלומר אם ורק אם $3<x<3+\frac{4}{A^2}$ ולכן מספיק לבחור $\delta\le\frac{4}{A^2}$ ממשי.

6. בכל אחד מהסעיפים הבאים נסחו את הטענה המבוקשת :

א. נסחו במונחים של ε,δ את הטענה : פונקציה f רציפה בנקודה c.

תשובה: פונקציה f רציפה בנקודה c אם f מוגדרת בנקודה c ולכל $\varepsilon>0$ ממשי קיים $\delta>0$ ממשי כך שלכל x המקיים $|x-c|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$.

ב. תהי f פונקציה המוגדרת בנקודה c. נסחו במונחים של ε,δ את הטענה : לפונקציה f יש אי רציפות סליקה בנקודה c.

תשובה: לפונקציה f יש אי רציפות סליקה בנקודה c אם קיים $L\in\mathbb{R}$ (המקיים $f(c)\neq L$) כך שלכל $\varepsilon>0$ ממשי קיים $\delta>0$ ממשי כך שלכל x המקיים $|x-c|<\delta$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$.

ג. תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה השמאלית של הנקודה $c\in\mathbb{R}$ וכן לכל $x\approx c, x<c$ מתקיים $f(x)\approx L$. נסחו טענה זו במונחים של ε,δ.

תשובה: לכל $\varepsilon>0$ ממשי קיים $\delta>0$ ממשי כך שלכל x המקיים $c-\delta<x<c$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$.

ד. תהי $f\left(x\right)$ פונקציה המוגדרת בסביבה הימנית של $x=5$ כולל הנקודה עצמה.
לכל $A>0$ ממשי קיים $\delta>0$ (התלוי ב-A) ממשי כך שלכל x המקיים $5<x<5+\delta$ מתקיים $f\left(x\right)>A$. נסחו טענה זו במונחים של היפרממשיים.
מה ניתן לומר על התנהגות של הפונקציה מימין לנקודה $x=5$?
תשובה: לכל $x>5, x\approx 5$ מתקיים $f\left(x\right)$ אינסופי חיובי. בסימונים:
$\lim_{x\to 5^+} f\left(x\right)=\infty$.
לפונקציה $f\left(x\right)$ יש אי רציפות מסוג שני מימין לנקודה $x=5$.