לינארית 2 תרגול 11

9 ביוני 2021

1 מטריצת גרם

הגדרה: יהי V ממ"פ, ויהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס, אזי מטריצת גרם של B מוגדרת:

$$(G_B)_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$$

תרגילים:

1. יהי V ממ"פ מעל שדה $\mathbb{F}$ ממימד n, ויהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. יהיו $\{c_1, \dots, c_n\} \subseteq \mathbb{F}$.
הוכיחו: קיים $v \in V$ כך ש־

$$\forall j : \langle v, v_j \rangle = c_j$$

פתרון: כדי למצוא וקטור v נמצא פשוט צ"ל מתאים, כלומר, צריך למצוא סקלארים $x_1, \dots, x_n$ כך ש־

$$\forall j : \langle v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, v_j \rangle = c_j$$

בעצם יש לנו פה מערכת משוואות לינארית, כאשר המשוואה ה־j היא:

$$\langle \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, v_j \rangle = c_j$$

נבין מה זו המשוואה הזו:

$$c_j = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \langle v_i, v_j \rangle =$$

$$= (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \langle v_1, v_j \rangle \\ \vdots \\ \langle v_n, v_j \rangle \end{pmatrix}$$

והגענו לכך: $\left(x_1,\dots,x_n\right) G_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, וכיון שמטריצת גרם הפיכה, אז נקבל:

$$\left(x_1,\dots,x_n\right) = \left(c_1,\dots,c_n\right)\left(G_B\right)^{-1}$$

במילים אחרות: קיבלנו שהסקלארים המהווים את הצ"ל המתבקש שייתן לנו את v הם הפתרון למערכת כאשר לקוחים את G_B^t.

2 העתקה צמודה

הגדרה: תהי $T:V\to W$ הע"ל, ההעתקה הצמודה $T^*:W\to V$ היא ההעתקה היחידה המקיימת:

$$\forall v\in V, w\in W : \langle Tv,w\rangle = \langle v,T^*w\rangle$$

תרגילים:

1. תהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ כאשר המרחבים עם המכפלה הסטנדרטית, המוגדרת ע"י:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2y \\ 2x-y \end{pmatrix}$$

הוכיחו:

$$T^*\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z \\ x+2y-z \end{pmatrix}$$

פתרון: מה שצריך להוכיח זה ש:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x+y \\ 2y \\ 2x-y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = \langle Tv,w\rangle = \langle v,T^*w\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x+2z \\ x+2y-z \end{pmatrix} \right\rangle$$

פשוט פותחים את שני האגפים ומקבלים אותו דבר:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x+y \\ 2y \\ 2x-y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = x^2+xy+2y^2+2xz-yz$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x+2z \\ x+2y-z \end{pmatrix} \right\rangle = x^2+2xz+xy+2y^2-yz$$

2. תהיינה $T_1, T_2 : V \to W$ הוכיחו: $(T_1+T_2)^* = T_1^* + T_2^*$

פתרון: נוכיח ישירות מההגדרה: צריך להראות:

$$\left\langle v, (T_1+T_2)^* w \right\rangle = \langle (T_1+T_2)\, v, w\rangle = \langle v, (T_1^*+T_2^*)\, w\rangle$$

הוכחה:

$$\langle (T_1+T_2)\, v, w\rangle = \langle T_1 v + T_2 v, w\rangle = \langle T_1 v, w\rangle + \langle T_2 v, w\rangle =$$

$$= \langle v, T_1^* w\rangle + \langle v, T_2^* w\rangle = \langle v, T_1^* w + T_2^* w\rangle = \langle v, (T_1^*+T_2^*)\, w\rangle$$

הערה:

$$\langle v, u+w\rangle = \langle v, u\rangle + \langle v, w\rangle$$

הוכחה:

$$\langle v, u+w\rangle = \overline{\langle u+w, v\rangle} = \overline{\langle u, v\rangle} + \overline{\langle w, v\rangle} = \langle v, u\rangle + \langle v, w\rangle$$

3. נגדיר $V = \mathbb{R}^2$ עם המ"פ:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle = 2xx' + yy'$$

נגדיר את $W = \mathbb{R}^2$ עם המ"פ הסטנדרטית. תהי $T : V \to W$ המוגדרת ע"י:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 2y \end{pmatrix}$$

מצאו את T^* מפורשות.

פתרון: נמצא בסיסים או"נ לשני המרחבים:

$$S_V = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

כי ניתן לראות ש־ $\langle e_1, e_2\rangle_V = 0$כלומר, הם או"ג, לכן נותר לנרמל אותם, וזה מה שקיבלנו:

$$\|e_1\|_V = \sqrt{2}, \|e_2\| = 1$$

$$S_W=\{e_1,e_2\}$$

נמצא כעת את $[T]_{S_W}^{S_V}$, ואז כיון שהם נורמלים נקבל:

$$[T^*]_{S_V}^{S_W}=\left([T]_{S_W}^{S_V}\right)^*$$

כיון ש־T נתונה נוכל לחשב:

$$[T]_{S_W}^{S_V}=\left(\begin{array}{cc}\left[T\left(\begin{array}{c}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{array}\right)\right]_{S_W} & [Te_2]_{S_W}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}\left[\left(\begin{array}{c}\sqrt{2}\\0\end{array}\right)\right]_{S_W} & \left[\left(\begin{array}{c}3\\2\end{array}\right)\right]_{S_W}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}\sqrt{2} & 3\\0 & 2\end{array}\right)$$

כלומר:

$$[T^*]_{S_V}^{S_W}=\left(\begin{array}{cc}\sqrt{2} & 3\\0 & 2\end{array}\right)^*=\left(\begin{array}{cc}\sqrt{2} & 0\\3 & 2\end{array}\right)$$

מה זאת אומרת?

$$[T^*e_1]_{S_V}=\left(\begin{array}{c}\sqrt{2}\\3\end{array}\right)$$

כלומר:

$$T^*e_1=\sqrt{2}\left(\begin{array}{c}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{array}\right)+3e_2=\left(\begin{array}{c}1\\3\end{array}\right)$$

ובנוסף:

$$[T^*e_2]_{S_V}=\left(\begin{array}{c}0\\2\end{array}\right)=0\left(\begin{array}{c}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{array}\right)+2e_2$$

כלומר:

$$T^*e_2=\left(\begin{array}{c}0\\2\end{array}\right)$$

למסקנה:

$$T^*\left(\begin{array}{c}x\\y\end{array}\right)=T^*\left(x\left(\begin{array}{c}1\\0\end{array}\right)+y\left(\begin{array}{c}0\\1\end{array}\right)\right)=xT^*e_1+yT^*e_2=x\left(\begin{array}{c}1\\3\end{array}\right)+y\left(\begin{array}{c}0\\2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}x\\3x+2y\end{array}\right)$$

4. תהי $T:V\to W$ הע"ל. הוכיחו:

$$(Im(T))^{\perp}=\ker(T^*)$$

פתרון: כמובן $T^* : W \to V$. יהי $w \in \ker(T^*)$:

$$w \in \ker(T^*) \iff T^*w = 0 \iff \forall v \in V : \langle v, T^*w\rangle = 0 \iff$$

$$\iff \forall v \in V : \langle Tv, w\rangle = 0 \iff w \in (Im(T))^{\perp}$$

מכיון ש־ $Im(T) = \{Tv : v \in V\}$.

5. יהי $V = \mathbb{R}^n$ עם מ"פ סטנדרטית, ויהי $\{0\} \neq W \leq V$. נגדיר $T : V \to V$ ע"י:

$$Tv = \pi_W(v)$$

מצאו את T^*.

פתרון: לפי משפט הפירוק הניצב:

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

ניקח $B_1 = \{w_1, \dots, w_k\}$ בסיס או"נ של W, וניקח $B_2 = \{w_{k+1}, \dots, w_n\}$ בסיס או"נ שדל $W^{\perp}$. נקבל $B = B_1 \cup B_2$ בסיס או"נ של V. נחשב את:

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

מכיון ש־

$$\forall 1 \leq i \leq n : T(w_i) = \begin{cases} w_i & 1 \leq i \leq k \\ 0 & k+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

קיבלנו מטריצה אלכסונית (עם k אחדות בחלק הראשון של האלכסון הראשי) והשאר אפסים, ולכן:

$$[T^*]_B^B = \left([T]_B^B\right)^* = [T]_B^B$$

ולכן $T^* = T$ (כיון שלפי אותו בסיס המטריצה המייצגת שווה).