אלגברה ליניארית 1

שאלון סגור

מועד א. 88-112 מרצה: פרופ. א. רזניקוב.

משך בחינה : **3** שעות (**לאחר הארכה**).

הנחיות: יש לפתור את כל **3** השאלות. (הציון המקסימאלי הוא 100)

אין להשתמש בחומר עזר, גם לא במחשבון.

נא כתבו פתרונות רק בטופס המצורף. המחברת לא תבדק.

.1

תהי $A \in M_{m\times m}(F)$ עם $rank(A)=r$. נגדיר אופרטור $T_A : M_{m\times n}(F) \to M_{m\times n}(F)$ על-ידי $T_A(X)=A\cdot X$ לכל $X \in M_{m\times n}(F)$.

א) (24 נק') חשבו $Ker(T_A) \subseteq M_{m\times n}(F)$ (רמז: איך זה קשור ל- $Null(A) \subseteq F^m$?)

ב) (9 נק') חשבו $\dim Ker(T_A)$ ו- $\dim \mathrm{Im}(T_A)$.

.2

א) (17 נק') יהיו $A,B \in M_{m\times n}(F)$ מטריצות המקיימות $Null(A) \subseteq Null(B)$.
הוכיחו שקיימת מטריצה $C \in M_{m\times m}(F)$ כך ש- $B=CA$.

ב) (17 נק') תהיו $A \in M_{m\times n}(F)$ עם $rank(A)=r>0$. הוכיחו שקיימות r מטריצות $B_1,\dots,B_r \in M_{m\times n}(F)$ כך ש- $A=B_1+\dots+B_r$ ו- $rank(B_i)=1$ לכל $1\le i\le r$.

.3

א) (17 נק') יהי $U \subseteq V$ תת-מרחב במרחב נוצר סופית V. הוכיחו שקיים תת-מרחב $W \subseteq V$ כך ש $V=U\oplus W$. לאיזה U קיים תת-מרחב W יחיד עם תכונה זו?

ב) (17 נק') יהיו V ו U מרחבים ווקטורים נוצרים סופית מעל שדה F. נניח ש- $\dim V = \dim U$.
הוכיחו שקיים איזומורפיזם בין V ל- U.

הערה: כל השאלות חוץ מ-2א הן סטנדרטיות.
שאלה 2-א היא עם אתגר ונתנו נקודות גם
עבור פתרון חלקי.

בהצלחה!

נא כתבו פתרונות רק בטופס המצורף. המחברת לא תבדק.

נא כתבו רק על צד אחד של הטופס.

שאלון סגור **טופס פתרונות**

אלגברה ליניארית 1, מועד א. 88-112 מרצה: פרופ. א. רזניקוב.

נא כתבו פיתרון סופי מפורט בטופס זה. במקרה חרום מותר להשתמש בדף נוסף המצורף בסוף הטופס.
ההתייחסות למחברת היא כלטיוטה בלבד.
המחברת לא תבדק.
נא כתבו רק על צד אחד של הטופס.

מס' שאלה	1	2	3	
ציון				

פתרון לשאלה : $\boxed{1}$ א) $A\cdot X=0$ ל- $X\in M_{m\times n}(F)$ אם ורק אם $A\cdot X^i=0$ לכל העמודה $X^i\in F^m$ של מטריצה X. כלומר $X\in \mathrm{Ker}\,T_A$ אם ורק אם $X^i\in \mathrm{Null}\,A$ לכל $1\le i\le n$ או מרחב העמודות $\mathrm{Null}\,A\supseteq \mathrm{Cspan}(X)$.

כלומר: $\mathrm{Ker}\,T_A=\{X\mid \mathrm{Cspan}\,X\subseteq \mathrm{Null}\,A\}$.

(*) אפשרות אחרת לתשובה: נציג $M_{m\times n}(F)$ כ סכום ישר של העמודות אפשריות, כלומר $M_{m\times n}\cong \underbrace{F^m\oplus F^m\oplus\dots\oplus F^m}_{n}$. אז
$\mathrm{Ker}\,T_A=\mathrm{Null}\,A\oplus\mathrm{Null}\,A\oplus\dots\oplus\mathrm{Null}\,A\subseteq F^m\oplus\dots\oplus F^m$ לפי $\mathrm{Null}\,A\subseteq F^m$ בכל אחד מגורמים בסכום.

ב) אפשר להציג בסיס ל: $\{X\mid \mathrm{Cspan}\,X\subset \mathrm{Null}\,A\}=\mathrm{Ker}\,T_A$

יהי $\{v_1,\dots,v_k\}\in \mathrm{Null}\,A\subseteq F^m$ בסיס, $k=\dim \mathrm{Null}\,A=m-r$

נגדיר מטריצות $B_{il}\in M_{m\times n}(F)$, $1\le l\le k$, $1\le i\le n$ ע"י

$(B_{il})^j=v_l$ אם $j=i$ ו 0 אחרת.

(כלומר העמודה ה-i של B_{il} הינה v_l ועמודות אחרות הן 0)

כל מטריצה ב-$\mathrm{Ker}\,T_A$ היא צ"ל של B_{il} כי לכל מטריצה $X\in \mathrm{Ker}\,T_A$ כל העמודות הן ב-$\mathrm{Null}\,A$. יש סה"כ $n\cdot k=n(m-r)$ מטריצות כאלה. $\Leftarrow$ $\dim \mathrm{Ker}\,T_A=n\cdot m-n\cdot r$ $\Leftarrow$ $\dim \mathrm{Im}\,T_A=n\cdot r$

(*) אפשר לחשב מ"מ גם לפי הצגה הנ"ל כי כ. סכום ישר.
$\dim(\underbrace{\mathrm{Null}\,A\oplus\dots\oplus\mathrm{Null}\,A}_{n})=n\cdot(m-r)$

נניח ש- $U\neq\{0\}$ או $U\neq V$.

פתרון לשאלה : $\boxed{3}$. א. נבחר בסיס ל- U $\{v_1,\dots,v_k\}\subseteq U$, $k=\dim U$

ונשלים אותו לבסיס ב- V $\{v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_n\}\subseteq V$ $n=\dim U$.

נגדיר $W=\operatorname{Span}\{v_{k+1},\dots,v_n\}$, אז ת"ח: $U+W=\operatorname{Span}\{v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_n\}=V$

נחקר $U\cap W$: אם $v\in U\cap W$ אז $v=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i v_i\in U$

וגם $v=\sum_{i=k+1}^{n}\beta_i v_i \Leftarrow$

$\Leftarrow 0=\sum\alpha_i v_i-\sum\beta_i v_i$ $\quad 0=\alpha_1=\alpha_2\dots=\beta_{k+1}\dots=\beta_n$ כי $\{v_1,\dots,v_n\}$ בת"ל $\Leftarrow v=0$

$\Leftarrow U\cap W=\{0\}$ $\Leftarrow V=U\oplus W$.

(*) אפשרות אחרת לחקור: $\dim U\cap W=-\dim(U+W)+\dim U+\dim W$

אבל $\dim U=k$, $\dim(U+W)=\dim V=n$, $\dim W=n-k$ $\Leftarrow \dim U\cap W=0$

$\Leftarrow U\cap W=0$ (*)

ב. נבחר בסיסים $\{v_1,\dots,v_n\}\subseteq V$, $\{u_1,\dots,u_n\}\subseteq U$ $n=\dim V=\dim U$

ונגדיר העתקה $T:V\to U$ ע"י $T(v_i)=u_i$, $1\le i\le n$.

אז ה"ל $\operatorname{Im}T=\operatorname{Span}\{T(v_i)\}=\operatorname{Span}\{u_i\}=U$ $\Leftarrow \dim\operatorname{Im}T=n=\dim U$ $\Leftarrow \operatorname{Im}T=U$ – על.

נחקר $\dim\ker T$: $\dim\ker T=\dim V-\dim\operatorname{Im}T=n-n=0$ $\Leftarrow \ker T=\{0\}$ – חד-חד ערכי.

פתרון לשאלה : $\boxed{2}$. ב. אם $A'\in M_{m\times n}(F)$ מטריצה מדורגת עם $\operatorname{rank}A'=r$

אז ל-A' יש r שורות שונות מ-0 , ו $A'=B_1'+\dots+B_r'$

כאשר $B_i'\in M_{m\times n}(F)$ רק שורה ה-i שלה היא שורה ה-i של A' , כל השורות האחרות הן 0.

(כלומר: $(B_i')_k=A_i'$ אם $k=i$, 0 אחרת). ברור $\operatorname{rank}B_i'=1$ כי יש להן רק שורה אחת $\neq 0$.

אם A כללית אז קיימת מטריצה הפיכה P כך ש- $PA=A'$, P אינוולריות!, A' מדורגת. נקבל

$A=P^{-1}A'=P^{-1}B_1'+\dots+P^{-1}B_r'$

$\Leftarrow A=B_1+\dots+B_r$ כאשר $B_i=P^{-1}B_i'$, $\operatorname{rank}B_i=\operatorname{rank}(P^{-1}B_i')=\operatorname{rank}B_i'=1$!

כי P לא סינגולרית.

(*) W יחיד אם $U=V$ (ואז $W=\{0\}$) או $U=\{0\}$ (ואז $W=V$).

אחרת W איננו יחיד (הוכיחו!)

3-א: נשתמש בהעתקות לינאריות:

נגדיר $T_A,T_B: F^n\to F^m$ ע"י $T_A(x)=Ax$, $T_B(x)=Bx$, $x\in F^n$

אם קיימת $C\in M_{m\times m}(F)$ כך ש $B=CA$ אז העתקה $T_C: F^m\to F^m$

המוגדרת ע"י $T_C(Y)=CY$, $Y\in F^m$ מקיימת $T_B=T_C\circ T_A$.

נשים לב: העתקה כזאת וכן שלכל ש-C קיימת

כי כל העתקה מ-F^m ל F^m מוגדרת ע"י מטריצה כלשהי.

נבחר בסיס ל $NullA$ $\{v_1..v_k\}\subseteq NullA$, $k=\dim NullA$, ונשלים אותו

לבסיס ב- $NullB$; $\{v_1..v_k,v_{k+1}..v_l\}\subseteq NullB \le NullA\le F^n$, $l=\dim NullB$.

ונשלים קבוצה זו לבסיס ב F^n: $\{v_1,..,v_k,v_{k+1}..v_l,v_{l+1}..v_n\}\subseteq F^n$.

העתקה T_A מקיימת: $T_A(v_i)=0$ $1\le i\le k$, $T_A(v_i)=w_i\in F^m$, $k+1\le i\le n$

כאשר "וקטורים" $\{w_i\}_{i=k+1}^n$ בת"ל כי $\dim ImT_A=n-k$, $m\geq$.

העתקה T_B מקיימת $T_B(v_i)=0$, $1\le i\le l$, $T_B(v_i)=u_i\in F^m$, $l+1\le i\le n$

כאשר "וקטורים" $\{u_i\}_{i=l+1}^n$ בת"ל כי $\dim ImT_B=n-l$

נשלים קודם את $\{w_i\}_{i=k+1}^n$ בת"ל עד לבסיס ב-F^m ע"י: $\{z_i\}_{i=1}^t$, $t=m-(n-k)\geq 0$.

נגדיר העתקה $T_C: F^m\to F^m$ ע"י: $T_C(w_i)=0$ ל $k+1\le i\le l$, $T_C(w_i)=u_i$, $l+1\le i\le n$

ו $T_C(z_i)=0$ לכל i.

מתקיים: ל- $1\le i\le k$, $T_C\circ T_A(v_i)=T_C(T_A(v_i))=T_C(0)=0=T_B(v_i)$

ל- $k+1\le i\le l$, $T_C\circ T_A(v_i)=T_C(T_A(v_i))=T_C(w_i)=0=T_B(v_i)$

ל- $l+1\le i\le n$, $T_C\circ T_A(v_i)=T_C(T_A(v_i))=T_C(w_i)=u_i=T_B(v_i)$

כלומר $T_C\circ T_A(v_i)=T_B(v_i)$ לכל i $\Leftarrow$ $T_B=T_C\circ T_A$ $\Leftarrow$ קיימת מטריצה

C (המייצגת T_C) כך ש $B=C\cdot A$.

הערות:

1. אפשר לפתור א-3 בלי העתקות
אבל להשתמש ישירות וכפל של מטריצות.
פתרון עם העתקות יותר ברור.

2. אפשר לתת הוכחה אחרת שמשתמשת
בצורה מדורגת של A ו B ובודקים כל פתרון
של $Bx=0$ הוא גם פתרון של $Ax=0$
(כלומר: $\text{Null}A \subseteq \text{Null}B$).

3. אם $\text{Null}A = \text{Null}B$ אז הוכחנו (ע"י א-3 !)
שלשתי מערכות $Ax=0$ ו $Bx=0$ שקילות
(כלומר יש להן אותו מרחב פתרונות)
אם ורק אם מטריצות A ו B שקולות שורה
(כלומר $B=PA$ ו P לא סינגולרית)
בפתרון שנתתי מטר'. C לא בהכרח
לא סינגולרית. תחשבו איך לבנות מטר'
לא סינגולרית אשר $\text{Null}A=\text{Null}B$ ולמה לא
קיימת כזאת אם $\text{Null}A \subsetneq \text{Null}B$.
בהרצאה הוכחנו רק חלק אחד של טענה (איזה?)
כיוון ההפוך הוכחנו בעזרת מטר'
קנונית.

פתרון ל-2 בעזרת העתקות לינאריות:

נגדיר העתקה: $T_A: F^n \to F^m$, $T_A(x)=A\cdot x$. מתקיים

$\dim \operatorname{Im} T_A = \operatorname{rank} A = r$ ו- $\dim \operatorname{Ker} T_A = n-r$. נבחר בסיס

ל- $\operatorname{Ker} T_A$: $\{v_{r+1},\dots,v_n\}$ ונשלים אותו

לבסיס ב $\{v_1,\dots,v_r,v_{r+1},\dots,v_n\}\subseteq F^n$. מתקיים

$$\dim \operatorname{Im} T_A = \dim \operatorname{Span}\{T_A(v_1),\dots,T_A(v_r)\} = r$$

$\Leftarrow$ וקטורים $\{T_A(v_1),\dots,T(v_r)\}$ ב- F^m בת"ל, בפרט $T_A(v_i)\neq 0$, $1\le i\le r$

נגדיר r העתקות $T_{B_i}: F^n \to F^m$, $1\le i\le r$, ע"י:

$T_{B_i}(v_j)=0$ אם $j\neq i$

ו- $T_{B_i}(v_i)=T_A(v_i)$.

מתקיים:

$$\dim \operatorname{Im} T_{B_i} = \dim \operatorname{Span}\{T_A(v_i)\} = 1$$

כי $T_A(v_i)\neq 0$ ל- $1\le i\le r$.

כמו כן מתקיים

ל- $1\le j\le r$: $\sum_{i=1}^{r} T_{B_i}(v_j) = T_{B_j}(v_j) = T_A(v_j)$

ול- $r+1\le j\le n$: $\sum_{i=1}^{r} T_{B_i}(v_j) = 0 = T_A(v_j)$

כלומר:

$\sum_{i=1}^{r} T_{B_i} = T_A$ (כי פועלות אותו דבר על הבסיס $\{v_i\}$)

כל העתקה $T: F^n \to F^m$ מיוצגת ע"י מטריצה.

$\Leftarrow$ קיימות r מטריצות B_i כך ש: $T_{B_i}(x)=B_i\cdot x$

ו- $\sum_{i=1}^{r} B_i = A$ ו- $\operatorname{rank} B_i = \dim \operatorname{Im} T_{B_i} = 1$