נמצא וע:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} z=0 \\ y=0 \\ x=t \end{array} \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⇐ הריבוי האלגברי $=3$
הריבוי הגיאומטרי $=1$ $\Big\} \neq$ ולכן A לא לכסינה

הערה:
[המשפט היסודי של האלגברה: לכל פולינום יש פתרון מעל $\mathbb{C}$]
ולכן כל פולינום מתפרק לגורמים ליניאריים מעל $\mathbb{C}$.
⇐ ולכן: מעל $\mathbb{C}$ כדי ש-A תהיה לכסינה מספיק לדרוש שלכל ע"ע הר"א = הר"ג.

תרגיל: הוכח: A הפיכה $\Longleftrightarrow$ לכל הע"ע, λ, של A מתקיים $0\neq\lambda$

הוכחה: $(\Leftarrow)$ נתון A הפיכה.
נניח בשלילה שקיים ע"ע $0=\lambda$. אזי $0=|0\cdot I - A| = |A - 0\cdot I|$
$$\searrow \quad |A| = 0$$
A לא הפיכה, סתירה!

$(\Rightarrow)$ נניח שלכל ע"ע של A מתקיים שהוא $\neq 0$.
ונניח בשלילה ש-A אינה הפיכה. אזי $|A| = 0$
$$|A| = |A - 0\cdot I|$$
צ"ל $|A - 0\cdot I| = 0$ ולכן 0 הוא ע"ע של A. סתירה!

משל [redacted]

(*) האם יש קשר בין הפיכות ולכסינות? ← כלומר האם אחד גורר את השני?

לא, נראה דוג':

(1) מטריצת האפס לא הפיכה וכמובן שכן לכסינה שהרי
$$(I)^{-1}\cdot 0\cdot I = 0$$
אלכסונית

(כל מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ היא לא הפיכה וכן לכסינה)

(2) מטריצת היחידה הפיכה ולכסינה.

(3) נראה מטריצה שכן הפיכה ולא לכסינה ⟵

$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ היא הפיכה (כי דטר׳ $\neq 0$) ולא לכסינה כי:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 0 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda = 1$$

נמצא ו״ע: $\left(\begin{array}{cc|c}0&1&0\\0&0&0\end{array}\right) \to \overset{\text{ו״ע}}{V} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

כ״א: ר״א $=2$, ר״ג $=1$ $\Big\}\neq$ ולכן לא לכסינה.

מסקנה: לכסינה $\not\Leftrightarrow$ הפיכה

משפט קיילי המילטון: תהי $A\in F^{n\times n}$.
נסמן P_A = הפ״א של A. אזי $P_A(A)=0$

לדוגמ': $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}$ אז

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 0 & 3-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)$$

$$P_A(A) = (2I-A)(3I-A) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0&-1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

מציאת המטריצה ההפוכה בעזרת קיילי המילטון:

נתונה A. ונתון: $P_A = x^3-2x^2+x-4$

מהי A^{-1}? (הביעו אותה בעזרת A)

פתרון: עפ״י קיילי המילטון $A^3-2A^2+A-4I=0$

$$\Rightarrow A\underbrace{\left(\frac{A^2-2A+I}{4}\right)}_{=A^{-1}} = I$$

הגדרה: תהי $A\in F^{n\times n}$. "הפולינום המינימלי" של A הוא פולינום מתוקן מדרגה מינימלית ש-A מאפסת אותו

המקדם של החזקה הגבוהה ביותר הוא 1

לינארית 2 - תרגול 7

להזכיר הגדרת של הפ"א, ע"ע, ו"ע, ר"א, ר"ג, לכסון...

הפולינום המינימלי:

פמ = פולינום מינימלי

הגדרה: תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$

"הפולינום המינימלי" של A הוא פולינום מתוקן (1) מדרגה מינימלית (2) ש- A מאפסת (3)

"פולינום מתוקן" זהו פולינום שהמקדם של החזקה הגבוהה ביותר הוא 1. לדוג': $1\cdot x^3-2x+4$

סימון $m_A(\lambda)$ הפול' המינימלי של A.

$P_A(\lambda)$ הפול' האופייני של A

הערה: $m_A \mid P_A$

$\deg m_A(\lambda)\le \deg P_A(\lambda)$

דוג': (1)

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$P_A(\lambda)=$ [redacted] λ^3

$m_A(\lambda)=\lambda$

כי אכן זהו פול' מתוקן מדרגה מינימלית ש- A מאפסת

(2)

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$P_I(\lambda)=(1-\lambda)^4$

$m_A(\lambda)=$ [redacted]

הערה: לא תמיד נוכל לקחת חזקה 1 כמו שעשינו. בדוג' הנ"ל שלקחנו I, $(\lambda-1)$

מציאת הפולינום המינימלי:

תמיד מתקיים שאם הפ"א הוא $P_A(\lambda)=(\lambda-a_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(\lambda-a_l)^{k_l}$

אז הפ"מ יהיה מהצורה: $m_A(\lambda)=(\lambda-a_1)^{j_1}\cdot\ldots\cdot(\lambda-a_l)^{j_l}$

כאשר $1\le j_i\le k_i$ לכל $1\le i\le l$

דוג: (1) אם $P_A=(\lambda-1)(\lambda-5)$

אז מתחייב ש- $m_A=(\lambda-1)(\lambda-5)$ (~~ש~~- המקדם של החזקה הכי גבוהה אכן 1)

(2) $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ $P_A=(2-\lambda)^2(1-\lambda)$

ולכן

(נשים לב ש שמקדם החזקה הכי גבוהה הוא 1 לעומת שב- P_A היה -1)

m_A → $(\lambda-2)^2(\lambda-1)$

m_A → $(\lambda-2)(\lambda-1)$

איך נדע מי מהם?

נציב את A ונבדוק. נתחיל להציב מזה עם החזקות הנמוכות יותר כי אם נקבל בו 0 אז אין טעם לבדוק אחד עם חזקות גבוהות יותר שהרי אנו רוצים פולינום מינימלי

נציב:
$$(A-2I)(A-I)=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ \checkmark$$

ולכן $m_A(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-1)$

שאלה: אם לשתי מטריצות יש את אותו פ"א האם יש להן אותו פ"מ?

תשובה: לא, נביא דוג:

$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$
$P_A=(1-\lambda)^2$	$P_B=(1-\lambda)^2$
$m_A=\lambda-1$	$m_B=(\lambda-1)^2$

($\lambda-1$ לא טוב כי $B-I\neq0$ ולכן ניקח חזקה גבוהה יותר)

אכן אותו פ"א אבל פ"מ שונה!

משפט: אם $A,B\in F^{n\times n}$ מטריצות דומות
אז הפ"א שלהם זהה וגם הפ"מ שלהם זהה
הוכחנו שיעור שעבר

הערה: A,B דומות $\xLeftarrow{\text{עפ"י המשפט הנ"ל}}$ אותו פ"א ואותו פ"מ
$\not\Longrightarrow$ אולי כדאי להזכיר עם מטר' 2x2, 3x3 ...

הערות: 1. לכל פולינום f כך ש- $f(A)=0$ מתקיים $m_A | f$
(ז"א $f=m_A\cdot g$)

2. מטריצה היא לכסינה $\iff$ הפ"מ מתפרק לגורמים לינאריים שונים

דוג': $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ $\quad P_A=(\lambda-1)^2$ וניתן לחשב ולמצוא ש-
$m_A=(\lambda-1)^2$
אמנם מתפרק לגורמים לינאריים אבל לא שונים.
ולכן A אינה לכסינה!

הערה: אם לשתי מטר' אותו פ"א $\Rightarrow$ לא אומר כלום בהכרח על דמיון
אם לשתי מטר' מאותו גודל אותו פ"מ $\Rightarrow$ לא בהכרח דומות
דומות $\Leftarrow$ אותו פ"א ואותו פ"מ

תרגיל: תהי $A\in M_{10}(\mathbb{R})$. נתון $A^2=I$, $tr(A)=6$.
חשבו פ"א, פ"מ של A

פתרון: $A^2=I \Leftarrow A^2-I=0$
$g(x)=x^2-1 \Rightarrow g(A)=0$
עפ"י משפט $m_A | g$

(4) בס"ד

$m_A | g$ כאשר $g=(x-1)(x+1)$

ולכן האפשרויות לפ"מ הן: א. (1) $\rightarrow$ לא יתכן כי אם נציב את A עדיין ישאר I ולא 0.

ב. $(x+1)$ $\rightarrow$ גם לא יתכן כי אם כן אז $A+I=0$ ולכן $A=-I$

$$\Rightarrow \underset{10\times 10}{A} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow tr(A) = -10$

והרי נתון $tr(A)=6$

ג. $(x-1)$ $\rightarrow$ גם לא יתכן,

כי אם כן אז $A-I=0$ $\Leftarrow$ $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ ← מטר' 10×10

$\Rightarrow tr\,A = 10$

סתירה! נתון $tr\,A=6$

ד. $(x+1)(x-1)$ ✓ זה הפ"מ

$$m_A(x) = (x+1)(x-1)$$

כי סכום דרגות הפ"א היא 10 כי זו מטריצה 10×10

נמצא פ"א: כיוון שהפ"מ הוא $(x+1)(x-1)$ אז הפ"א הוא מהצורה $(x+1)^k(x-1)^{10-k}$

כמו כן, הפ"מ מתפרק לגורמים לינאריים שונים ולכן עפ"י משפט המטריצה לכסינה

כ"א $A \sim D$ ← אלכסונית עם ע"ע על האלכסון

למטריצות דומות אותו פ"א ולכן מספיק למצוא את הפ"א של D.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

8 פעמים

כי נתון $tr(A)=6$ ולמטריצות דומות אותה עקבה ולכן $tr(D)=6$ ועל האלכסון של D יש רק הע"ע ±1

לא ← סרקתי להשלים לזה

הפ"א $\Leftarrow$ $P_A(x) = (x+1)^8(x-1)^2$

משל ■

<u>הערה:</u> סכום ערכים עצמיים של מטריצה A = $\operatorname{tr} A$

מכפלת ע"ע — " — " = $|A|$

<u>הערה:</u> לגבי דרגה של מטר':

אם A לא הפיכה (אז לפי שיעורים קודמים יש ע"ע $=0$) ונניח $\operatorname{rank} A = k$

$\dim(\mathbb{F}^n) = n$

ואנו יודעים ש- $\underbrace{\dim(\mathbb{F}^n)}_{=n} = \underbrace{\dim(\operatorname{Im}(A))}_{=k} + \dim(\ker A)$

$\dim(\ker A) = \dim(\ker(A - 0 \cdot I))$ = ר"ג של ע"ע 0.

$\Rightarrow$ $\boxed{n-k = \text{ר"ג של ע"ע } 0}$

נניח ש- m זה המינימלי שמאפס

<u>הערה:</u> אם A נילפוטנטית (קיים m כך ש- $A^m = 0$).

אז הפ"מ שלה הוא $m_A(x) = x^m$

כ"א יש לה רק ע"ע $=0$ ולכן בפרט מתקיימת ההערה הקודמת ונקבל.

ר"ג של ע"ע 0 = $n - \underbrace{k}_{=\operatorname{rank} A}$.

נעבור לצורות ז'ורדן: (~~כבר התחלנו לדבר על זה בשיעור שעבר.. נזכיר בכל זאת. אבל לפני זה הערה~~)

<u>הערה:</u> <u>לבלוק</u> ז'ורדן $k \times k$ $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ הפ"מ = הפ"א (תוכיחו בש.ב)

וניתן לראות שהפ"א הוא $(x-\lambda)^k$

ולכן לבלוק ז'ורדן $k \times k$ הפ"מ = הפ"א = $(x-\lambda)^k$