אינפי 1 - תרגיל 4

1. הוכח: $\overline{\lim} a_n = -\underline{\lim}(-a_n)$. רמז: שאלה 7 בתרגיל 2, והגדרת ה $\overline{\lim}$ ו $\underline{\lim}$

פתרון:

$\overline{\lim} a_n = \inf\{b_1,b_2,....\}$ כאשר $b_n=\sup\{a_n,a_{n+1},...\}$, ו $\underline{\lim} a_n = \sup\{c_1,c_2,....\}$ כאשר $c_n = \inf\{a_n,a_{n+1},...\}$. לכן $\overline{\lim}(a_n)=\inf\{d_1,d_2,....\}$ כאשר $d_n=\sup\{a_n,a_{n+1},...\}$. לפי השאלה הראשונה מתרגיל 2 נובע ש $d_n = -\inf\{-a_n,-a_{n+1},...\}$ לכן

$\overline{\lim}(a_n)=\inf\{d_1,d_2,....\} = -\sup\{-d_1,-d_2,....\}$ אבל $\underline{\lim}(-a_n)=\sup\{e_1,e_2,...\}$ כאשר $e_n=\inf\{-a_n,-a_{n+1},...\}$. אבל $e_n=-d_n$ ולכן

$$\overline{\lim}(a_n) = -\sup\{-d_1,-d_2,....\} = -\sup\{e_1,e_2,....\} = -\underline{\lim}(-a_n)$$

2. תרגיל מודרך. תהי סדרה $\{a_n\}$ כך ש $\forall n\in\mathbb{N}: a_n>0$, ו- $\overline{\lim} a_n\cdot\overline{\lim}\frac{1}{a_n}=1$ הוכח ש $\{a_n\}$ מתכנסת.

a. הוכח ש $\frac{1}{\underline{\lim} a_n} = \overline{\lim}\frac{1}{a_n}$ בעזרת שאלה 8 מתרגיל 2

הוכחה: $\overline{\lim}\frac{1}{a_n}=\inf\{b_1,b_2,...\}$ כאשר $b_n=\sup\{\frac{1}{a_n},\frac{1}{a_{n+1}},...\}$. אבל לפי שאלה 8 בתרגיל 2 $\frac{1}{b_n}=\inf\{a_n,a_{n+1},...\}$ כאשר $A=\{\frac{1}{a_n},\frac{1}{a_{n+1}},...\}$ ו $A^{-1}=\{a_n,a_{n+1},...\}$ (והרי נתון $a_n>0$).

$\underline{\lim}a_n=\sup\{c_1,c_2,..\}$ כאשר $c_n=\inf\{a_n,a_{n+1},...\}=\frac{1}{b_n}$ ולכן

$\underline{\lim}a_n=\sup\{c_1,c_2,..\}=\sup\{\frac{1}{b_1},\frac{1}{b_2},..\}$ ובצורה דומה זה שווה ל

$\underline{\lim}a_n=\sup\{\frac{1}{b_1},\frac{1}{b_2},..\}=\frac{1}{\inf\{b_1,b_2,...\}}=\frac{1}{\overline{\lim}\frac{1}{a_n}}$ כפי שרצינו להוכיח.

הערה: $\underline{\lim}a_n, \overline{\lim}\frac{1}{a_n}\neq 0$ אחרת זו סתירה לנתון $\overline{\lim}a_n\cdot\overline{\lim}\frac{1}{a_n}=1$

b. הוכח שלכל סדרה $\{b_n\}$, אם $\overline{\lim} b_n = \underline{\lim} b_n = L$ אזי $\lim b_n = L$. רמז: הנח את שלילת הגבול, והמשך עד שתגיע לסתירה.

הוכחה: נניח ש L אינו הגבול של הסדרה b_n. לכן קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל n_0 קיים $n>n_0$ כך ש $|a_n-L|>\varepsilon$ במילים זה אומר שקיימים אינסוף איברים בסדרה המקיימים $|a_n-L|>\varepsilon$. ניקח

$n_0=1$ לכן קיים $n_1>n_0=1$ כך ש $\left|a_{n_1}-L\right|>\varepsilon$. כעת ניקח $n_0=n_1$ ולכן קיים $n_2>n_0=n_1$ כך ש $\left|a_{n_2}-L\right|>\varepsilon$ ונבנה ככה סדרה אינסופית n_k ומתוך הבנייה a_{n_k} תת סדרה של a_n המקיימת $\left|a_{n_k}-L\right|>\varepsilon$ לכל k. אבל $L=\underline{\lim}\, a_n\le\underline{\lim}\, a_{n_k}\le\overline{\lim}\, a_{n_k}\le\overline{\lim}\, a_n=L$ ולכן כי האי-שיוויונים הם בעצם שיוונות כלומר $\underline{\lim}\, a_{n_k}=\overline{\lim}\, a_{n_k}=L$ לכן $\overline{\lim}\, a_{n_k}=L$ הוא הגבול החלקי הגדול ביותר של a_{n_k} ולכן יש לה תת סדרה $a_{n_{kj}}$ שמתכנסת ל L אבל $\left|a_{n_{kj}}-L\right|>\varepsilon$ וזו סתירה להתכנסות שלה ל L

c. הסק ש $\{a_n\}$ מתכנסת (על הכתב, לא בראש...)

הוכחה: נתון ש $\overline{\lim}\, a_n\cdot\overline{\lim}\,\frac{1}{a_n}=1$ והוכחנו ש $\frac{1}{\underline{\lim}\, a_n}=\overline{\lim}\,\frac{1}{a_n}$ ולכן $\overline{\lim}\, a_n\cdot\frac{1}{\underline{\lim}\, a_n}=1$ ולכן $\overline{\lim}\, a_n=\underline{\lim}\, a_n$ ולכן $\{a_n\}$ מתכנסת.

3. חשב את גבול הסדרות:

a. $$a_n=\left(\frac{n^2-2}{n^2-3}\right)^{4n^2-1}$$

פתרון:

$$a_n=\left(\frac{n^2-2}{n^2-3}\right)^{4n^2-1}=\left(\frac{n^2-3}{n^2-3}+\frac{1}{n^2-3}\right)^{4n^2-1}=\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{4n^2-12+11}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{4(n^2-3)}\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{11}=\left(\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{n^2-3}\right)^4\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{11}$$

כעת, $\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{11}$ זה כפל של 11 (מספר קבוע) פעמים של סדרה ששואפת לאחד, ולכן לפי אריתמטיקה של גבולות שואף לאחד.

$\left(\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{n^2-3}\right)^4$ זה כפל של 4 פעמים סדרה ששואפת ל e ולכן שואף ל e^4.

סה"כ, $a_n\to e^4$

b. $a_n=\left(\frac{2n^3-1}{2n^3+3}\right)^{3n^3+4}$

פתרון:

$$a_n=\left(\frac{2n^3-1}{2n^3+3}\right)^{3n^3+4}=\left(1-\frac{4}{2n^3+3}\right)^{6(\frac{2n^3+3}{4})-\frac{1}{2}}=\left[\left(1-\frac{1}{\frac{2n^3+3}{4}}\right)^{\frac{2n^3+3}{4}}\right]^6\left(1-\frac{4}{2n^3+3}\right)^{-\frac{1}{2}}\to\left(e^{-1}\right)^6\cdot 1=e^{-6}$$

4. נתונות שתי סדרות $\{a_n\}$ ו $\{b_n\}$, נתון שהסדרה $\{a_n+b_n\}$ חסומה, ונתון $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$.

מצא את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

פתרון: $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ לכן לכל $M>0$ קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $a_n>M$. $\{a_n+b_n\}$ חסומה נגיד על ידי R (כלומר $a_n+b_n<R$). לכל $n>n_0$ $a_n>M$ ולכן $M+b_n<a_n+b_n<R$ ולכן $b_n<R-M$ לכל $n>n_0$. לכן לכל $M>0$ קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $a_n>R+M$, ולכן $b_n<R-(R+M)=-M$ כלומר $b_n\to-\infty$, ולכן $\frac{1}{b_n}\to 0$.

$\frac{a_n+b_n}{b_n}=(a_n+b_n)\frac{1}{b_n}\to 0$ מכיוון שסדרה חסומה כפול סדרה ששואפת לאפס שואף לאפס. אבל

$\frac{a_n+b_n}{b_n}=\frac{a_n}{b_n}+\frac{b_n}{b_n}=\frac{a_n}{b_n}+1\to 0$ ולפי אריתמטיקה של גבולות $\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_n}{b_n}+1-1\to 0-1=-1$

ולסיכום $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=-1$

5. הוכח שאם $\{a_n\}$ מתכנסת ו $\{b_n\}$ חסומה אזי $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$

פתרון:

$\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$ הינו הגבול החלקי הגדול ביותר של b_n לכן קיימת תת סדרה $\{b_{n_k}\}$ כך ש $b_{n_k}\to\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$.

$\{a_n\}$ מתכנסת, נגיד לגבול L לכן כל תת סדרה שלה מתכנסת לגבול L ולכן $a_{n_k}\to L$ ו $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=L$. ולכן לפי אריתמטיקה של גבולות $\lim a_{n_k}+b_{n_k}=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$ כלומר זה גבול חלקי של הסדרה a_n+b_n. $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)$ הינו הגבול החלקי הגדול ביותר של הסדרה a_n+b_n,

ולכן $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n\le\overline{\lim}(a_n+b_n)$.

בכיוון ההפוך, קיימת תת סדרה של a_n+b_n, $a_{n_k}+b_{n_k}$ כך ש $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)=\lim a_{n_k}+b_{n_k}$. שוב, $\{a_n\}$ מתכנסת ולכן גם כל תת סדרה שלה מתכנסת ולכן $\lim a_{n_k}=\lim a_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n$ ולפי אריתמיטקה של גבולות, $\lim b_{n_k}=\lim\left(b_{n_k}+a_{n_k}-a_{n_k}\right)=\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)-\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n$ ולכן $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)-\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\lim b_{n_k}\le\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$ ולכן $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)\le\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n$.

לסיום, אם $a\le b$ וגם $b\le a$ אזי $a=b$, במקרה שלנו קיבלנו $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$.

6. תהי $\{a_n\}$ סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $\begin{cases}a_{2n}=\dfrac{a_{2n-1}}{2}\\ a_{2n+1}=\dfrac{1}{2}+a_{2n}\end{cases}$. מצא את הגבולות החלקיים של $\{a_n\}$. (רמז: מצא את האיברים של $\{a_n\}$ כפונקציה של n - הוכח באמצעות אינדוקציה).

פתרון: קל להראות באינדוקציה ש $a_{2n}=\dfrac{2^{n-1}-1+a_1}{2^n}$ ו $a_{2n+1}=\dfrac{2^n-1+a_1}{2^n}$ ולכן הגבולות החלקיים של הסדרה הם 1 ו $\dfrac{1}{2}$.

7. תהי $\{a_n\}$ סדרה שאינה חסומה מלעיל. הוכח/הפרך:

a. $\{a_n\}$ שואפת לאינסוף

הפרכה: $a_n=(-1)^n n$ אינה חסומה מלעיל, אך אינה שואפת לאינסוף.

b. ל $\{a_n\}$ יש תת סדרה ששואפת לאינסוף

הוכחה: $\{a_n\}$ אינה חסומה מלעיל, כלומר לכל $M>0$ קיים n_0 כך ש $a_{n_0}>M$. ניקח $M_1>\max\{a_1,...,a_{n_0}\}$ ולכן קיים $n_1>n_0$ כך ש $a_{n_1}>M_1>a_{n_0}$ נמשיך בתהליך הזה עד שנקבל תת סדרה a_{n_k} מונוטונית עולה ולא חסומה ולכן מתכנסת במובן הרחב לאינסוף.

8. תהי $\{a_n\}$ סדרה חסומה. הוכח כי ל $\{a_n\}$ יש בהכרח תת סדרה מונוטונית.

הוכחה:

לפי משפט יש ל $\{a_n\}$ תת סדרה מתכנסת. לכן מספיק להוכיח שלכל סדרה מתכנסת יש תת סדרה מונוטונית. נניח $b_n\to L$ נוכיח שקיימת לה תת סדרה מונוטונית. קיימים אינסוף איברים

מתוך b_n המקיימים $b_n > L$ או שקיימים אינסוף איברים המקיימים $L < b_n$ או שקיימים אינסוף איברים המקיימים $b_n = L$ (זה נכון לכל מספר, לאו דווקא לגבול הסדרה).

אם קיימים אינסוף איברים המקיימים $b_n = L$, נבחר אותם להיות תת סדרה והיא כמובן מונוטונית (הסדרה הקבועה הינה מונוטונית).

נניח שקיימים אינסוף איברים הגדולים מ L, נבחר אחד מהם ונסמן אותו ב b_{n_1}. עבור $\varepsilon = b_{n_1} - L > 0$ קיים מקום בסדרה כך שהחל ממנו והלאה כל האיברים מקיימים $|b_n - L| < \varepsilon$ לכן בפרט קיים איבר כזה מבין אינסוף האיברים הגדולים מ L הנמצאים בסדרה אחרי b_{n_1}, נסמן איבר זה ב b_{n_2}. מתקיים $|b_{n_2} - L| < \varepsilon$ ולכן $b_{n_2} - L < \varepsilon = b_{n_1} - L$ ולכן $b_{n_2} < b_{n_1}$. נגדיר $\varepsilon = b_{n_2} - L > 0$ וכך הלאה נגדיר את תת הסדרה $\{b_{n_k}\}$ שהיא מונוטונית לפי הבנייה.

אם יש אינסוף איברים הקטנים מ L ניתן לבנות באופן דומה תת סדרה מונוטונית עולה.

הוכחה אחרת (אדווה):

תהי $\{a_n\}$ סדרה. איבר a_k נקרא דומיננטי אם מתקיים $\forall n > k : a_k \geq a_n$. במילים, איבר הינו דומיננטי אם הוא גדול שווה לכל האיברים הבאים אחריו בסדרה.

אם לסדרה יש אינסוף איברים דומיננטים, אז קל לראות שהם מהווים תת סדרה מונוטונית יורדת (הרי כל אחד קטן שווה לקודמיו – כי הם דומיננטיים).

נניח שלסדרה אין אינסוף איברים דומיננטים, ונבחר n_0 (מקום בסדרה) כך שלאחריו אין איברים דומיננטים כלל. כלומר, לכל $n > n_0$ האיבר a_n אינו דומיננטי. נבחר $n_1 > n_0$ כלשהו, לכן קיים איזה $n_2 > n_1$ כך ש $a_{n_2} > a_{n_1}$ (הרי a_{n_1} אינו דומיננטי). בפרט גם $n_2 > n_0$ לכן a_{n_2} דומיננטי ולכן קיים $n_3 > n_2$ כך ש $a_{n_3} > a_{n_2}$ וכך הלאה נבנה תת סדרה מונוטונית עולה.