הכנות למשפט קושי

סימון

אם $S \subset \mathbb{C}$, ∂S מציין את השפה של S.
$\overline{S} = S \cup \partial S$ נקרא S סגור

למה 1

אם $f\left(t\right)$ גזירה בz_0 אז

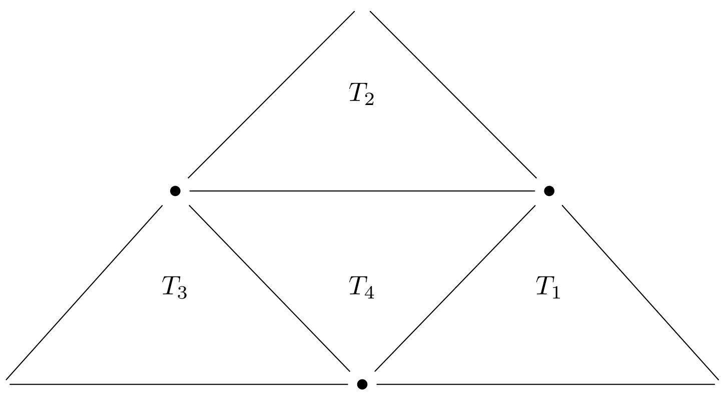
$$f\left(z\right)=\underbrace{f\left(z_0\right)+f'\left(z_0\right)\left(z-z_0\right)}_{\text{linear}}+\underbrace{\epsilon\left(z\right)\left(z-z_0\right)}_{\text{small error}}$$

כאשר

$$\lim_{z\to z_0}\epsilon\left(z\right)=0$$

למה 2(עקרון החלוקה)

אם $f\left(z\right)$ מוגדרת ורציפה ב$\overline{T}$ חלוקה של משולש ל4 חלקים מהצורה



אז

$$\oint_{\partial T}f\left(z\right)\,\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{4}\oint_{\partial T_k}f\left(z\right)\,\mathrm{d}z$$

משפט 5(משפט קושי במשולש)

יהי T משולש במישור. נניח ש$f\left(z\right)$ מוגדרת ואנליטית ב$\overline{T}$. אזי $\int_{\partial T}f\left(z\right)\,\mathrm{d}z=0$

הוכחה(גורסה)

תחילה נציין $S = \left|\int_{\partial T} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z\right|$. נחלק את T ל4 משולשים קטנים $T^{(i)}$, $i = 1,2,3,4$, ע"י הנקודות האמצעיות של הצלעות כמו בלמה 2. אז

$$\oint_{\partial T} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{4} \oint_{\partial T^{(k)}} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z$$

בהכרח אחד האינטגרלים בצד ימין גדול או שווה לאחרים. לאותו משולש נקרא T_1. ז"א:

$$\left|\oint_{\partial T_1} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z\right| \geq \frac{S}{4}$$

לגבי ההיקף של T_1, $\left|\partial T_1\right| = \frac{\left|\partial T\right|}{2}$. שוב נחלק את T_1 לארבעה משולשים ע"י הנקודות האמצעיות של הצלעות ונבחר משולש $T_2 \subset T_1$ כך ש$\left|\oint_{\partial T_2} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z\right| \geq \frac{S}{16}$ ו$\left|\partial T_2\right| = \frac{\left|\partial T\right|}{4}$.
אין מעצור לתהליך זה: נקבל סדרת משולשים

$$T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \cdots$$

$$\left|\oint_{\partial T_n} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z\right| \geq \frac{S}{4^n}$$

$$\left|\partial T_n\right| = \frac{\left|\partial T\right|}{2^n}$$

לפי למת קנטור $\bigcap_{n=1}^{\infty} T_n = \left\{z_0\right\}$ (נקודה אחת בלבד ב$\overline{T}$). f גזירה בz_0 לפי למה 1. בסביבת z_0,

$$f\left(z\right) = f\left(z_0\right) + f'\left(z_0\right)\left(z - z_0\right) + \epsilon\left(z\right)\left(z - z_0\right)$$

לכל n:

$$\oint_{\partial T_n} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z = \oint_{\partial T_n} \left[f\left(z_0\right) + f'\left(z_0\right)\left(z - z_0\right)\right]\,\mathrm{d}z + \int_{\partial T_n} \epsilon\left(z\right)\left(z - z_0\right)\,\mathrm{d}z$$

נעיר שלכל n האינטגרל הראשון שווה 0, כי לפונקציה $f\left(z_0\right) + f'\left(z_0\right)\left(z - z_0\right)$ יש פונקציה קדומה $f\left(z_0\right)z + f'\left(z_0\right)\frac{\left(z - z_0\right)^2}{2}$ שהיא פונקציה שלימה. לפי משפט 4 לכל מסילה סגורה γ ב$\mathbb{C}$

$$\int_{\gamma} f\left(z_0\right) + f'\left(z_0\right)\left(z - z_0\right)\,\mathrm{d}z = 0$$

לכן עבור כל $n \in \mathbb{N}$

$$\oint_{\partial T_n} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z = \oint_{\partial T_n} \epsilon\left(z\right)\left(z - z_0\right)\,\mathrm{d}z$$

נסמן ב

$$\epsilon_n = \sup\{|\epsilon(z)||z \in \partial T_n\}$$

כיוון ש$\lim_{z\to z_0} \epsilon(z) = 0 \Leftarrow \lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$

הסבר: ∂T_n הוא משולש קטן מאוד שמכיל את z_0 בתוכו, לכן כולו מוכל בסביבה קטנה של z והבכרח

$$\epsilon_n = \sup\{|\epsilon(z)||z \in \partial T_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

כעת, לפי הבניה שלנו, לכל $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{S}{4^n} \le \left|\oint_{\partial T_n} f(z)\, \mathrm{d}z\right| = \left|\oint_{\partial T_n} \epsilon(z)(z-z_0)\, \mathrm{d}z\right| \le ML = \underbrace{\epsilon_n \frac{|\partial T|}{2^n}}_{M} \underbrace{\frac{|\partial T|}{2^n}}_{L}$$

ז"א, לכל n $0 \le S \le \epsilon_n |\partial T|^2$

נשאיף $n \to \infty$, $\epsilon_n \to 0$ ונקבל ע"י משפט הסנדוויץ $S = 0$ וזה מ.ש.ל. ■

מסקנה

יהי $T \subset \mathbb{C}$ משולש. נניח ש$f(z)$ מוגדרת ורציפה ב$\overline{T}$ ואנליטית שם פרט לנקודה אחת $z_0 \in \overline{T}$. אזי

$$\oint_{\partial T} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$$

הוכחה

מקרה 1: z_0 נמצאת בקדקד אחד של T. נחלק

$$T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$$

כאשר T_3 משולש קטן המכיל את z_0.
לפי עקרון החלוקה

$$\oint_{\partial T} f(z)\, \mathrm{d}z = \oint_{\partial T_1} f(z)\, \mathrm{d}z + \oint_{\partial T_2} f(z)\, \mathrm{d}z + \oint_{\partial T_3} f(z)\, \mathrm{d}z$$

לפי משפט 5 $\oint_{\partial T_k} f(z)\, \mathrm{d}z = 0$ עבור $k = 1, 2$, לכן

$$\oint_{\partial T} f(z)\, \mathrm{d}z = \oint_{\partial T_3} f(z)\, \mathrm{d}z$$

כיוון שf רציפה בz_0 היא חסומה בסביבת z_0. נאמר $|f(z)| \le k$ על ∂T_3.
מכאן ש

$$0 \le \left|\oint_{\partial T} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\oint_{\partial T_3} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le ML = k\,|\partial T_3|$$

כיוון ש$|\partial T_3|$ קטן כרצוננו, בהכרח $\oint_{\partial T} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, ואזת ההוכחה במקרה הראשון.

מקרה 2: זה המקרה הכללי. נניח שz_0 נמצאת במקום כלשהו ב$\overline{T}$.
נחלק את T לT_k $T = \bigcup_{k=1}^{3}$ כאשר לכל k, z_0 נמצאת בקודקוד של T_k.
כעת, לפי המקרה הראשון

$$\oint_{\partial T} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{3}\oint_{\partial T_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

■

משפט 6(משפט קושי בתחום קמור)

יהי $D \subset \mathbb{C}$ תחום(פתוח) קמור(ז.א. לכל $z_1, z_2 \in D$ הקטע הישר $[z_1, z_2]$ נשאר כולו בD).
נניח ש$f(z)$ מוגדרת ורציפה בD ואנליטית שם פרט לנקודה אחת(לכל היותר), אזי לכל מסילה סגורה γ בD

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

הוכחה

לפי משפט 4, מספיק להוכיח שקיימת לf פונקציה קדומה $F(z)$ כך שלכל $t \in D$ $F'(z) = f(z)$.
ובכן: נבחר $z_0 \in D$ כלשהו ולכל $z \in D$ נגדיר

$$F(z) = \int_{\underbrace{[z_0, z]}_{\substack{\text{straight}\\ \text{line}}}} f(w)\,\mathrm{d}w$$

כיוון שD קמור, הקטע $[z_0, z]$ מוכל כולו בD ו$F(z)$ מוגדרת היטב ובאופן חד משמעי.

טענה: $F\left(z\right)$ אנליטית בD ו$F'\left(z\right)=f\left(z\right)$ לכל $z\in D$

הוכחה: נקבע איזה $z\in D$ ונראה שבאותה נקודה F גזירה ו$F'\left(z\right)=f\left(z\right)$. כיוון ש$D$ פתוח יש סביבה S של z שנשארת כולה בD. נבחר נקודה ב$z+\Delta z$ כS. אז

$$F\left(z+\Delta z\right)-F\left(z\right)=\int_{\left[z_{0},z+\Delta z\right]}f\left(w\right)\,\mathrm{d}w-\int_{\left[z_{0},z\right]}f\left(w\right)\,\mathrm{d}w$$

לפי משפט 5(קושי במשולש)

$$\int_{\left[z_{0},z\right]}f\left(w\right)\,\mathrm{d}w+\int_{\left[z_{0},z+\Delta z\right]}f\left(w\right)\,\mathrm{d}w-\int_{\left[z_{0},z+\Delta z\right]}f\left(w\right)\,\mathrm{d}w=0$$

נעביר אגף:

$$\int_{\left[z_{0},z+\Delta z\right]}f\left(w\right)\,\mathrm{d}w-\int_{\left[z_{0},z\right]}f\left(w\right)\,\mathrm{d}w=\int_{\left[z,z+\Delta w\right]}f\left(w\right)\,\mathrm{d}w$$

ז"א

$$F\left(z+\Delta z\right)-F\left(z\right)=\int_{\left[z,z+\Delta z\right]}f\left(w\right)\,\mathrm{d}w$$

עוד נעיר ש

$$\int_{\left[z,z+\Delta z\right]}f\left(z\right)\,\mathrm{d}w=\left.f\left(z\right)\cdot w\right|_{z=w}^{z+\Delta z=w}=f\left(z\right)\Delta z$$

$$f\left(z\right)=\frac{1}{\Delta z}\int_{\left[z,z+\Delta z\right]}f\left(z\right)\,\mathrm{d}w$$

נובע:

$$\frac{F\left(z+\Delta z\right)-F\left(t\right)}{\Delta z}-f\left(z\right)=\frac{1}{\Delta z}\int_{\left[z,z+\Delta z\right]}\left[f\left(w\right)-f\left(z\right)\right]\,\mathrm{d}w$$

צ"ל: כאשר $\Delta z\rightarrow 0$ אגף שמאל שואף לאפס. <u>שקול</u>: נראה שכאשר $\Delta z\rightarrow 0$ אגף ימין שואף לאפס.
לצורך זה יהי $\epsilon>0$ נתון. נתון שf רציפה בכל D ובפרט בנקודה $z\in Z$. לכן קיים $\delta>0$ כך שאם $\left|w-z\right|<\delta$ מתקיים $\left|f\left(w\right)-f\left(z\right)\right|<\epsilon$.
כעת, אם $\left|\Delta z\right|<\delta$ אז באינטגרל באגף ימין "w" נע על קטע $\left[z,z+\Delta z\right]$ שאורכו קטן מδ. לכן עבור כל w בקטע זה $\left|w-z\right|<\delta$ וממילא $\epsilon>\left|f\left(w\right)-f\left(z\right)\right|$.
לבסוף, אם $\left|\Delta z\right|<\delta$

$$\left|\frac{F\left(z+\Delta z\right)-F\left(z\right)}{\Delta z}-f\left(z\right)\right|=\frac{1}{\left|\Delta z\right|}\left|\int_{\left[z,z+\Delta z\right]}\left(f\left(w\right)-f\left(z\right)\right)\,\mathrm{d}w\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{\left|\Delta z\right|}ML\leq\frac{1}{\left|\Delta z\right|}\epsilon\left|\Delta z\right|=\epsilon$$

הדבר אפשרי לכל $\epsilon>0$, לכן נסיק שכאשר $\Delta z\rightarrow 0$ אגף שמאל שואף לאפס. זה שקול לכך ש$F'\left(z\right)$ קיימת ושווה $f\left(z\right)$. הדבר נכון לכל $z\in D$, לכל לf קיימת פוקנציה קדומה $F\left(z\right)$ בD.

נובע ממשפט 4 שלכל γ סגורה בD, $\int_{\gamma} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z=0$.

$\blacksquare$

דוגמה(מהשיעור הקודם)

כאשר T משולש המכיל את 0, $\oint_{\partial T}\frac{1}{z}\mathrm{d}z=2\pi i\neq0$. אין כאן סתירה למשפט קושי כי $\frac{1}{z}$ אנליטית ב∂T אבל לא ב$\overline{T}$ כולו, לכן אין סתירה למשפט 5.

גם אין סתירה למסקנה למשפט 5, כי בנקודה היוצאת מן הכלל $t=0$ הפונקציה $\frac{1}{z}$ לא רציפה.

משפט 7 - נוסחת קושי(בתחום קמור)

נניח ש$D\subset\mathbb{C}$ תחום קמור, ו$f\left(z\right)$ מוגדרת ואנליטית בD. עוד נניח שγ מסילה סגורה בD. אזי לכל $z_0\in D\backslash\gamma$

$$\mathrm{Ind}_{\gamma}\left(z_0\right)f\left(z_0\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f\left(z\right)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

הוכחה

ניקח $z_0\in D\backslash\gamma$ מסויים, ונגדיר פונקציה

$$G\left(z\right)=\begin{cases}\dfrac{f\left(z\right)-f\left(z_0\right)}{z-z_0} & z\neq z_0\\ f'\left(z_0\right) & z=z_0\end{cases}$$

נתון ש$f\left(z\right)$ אנליטית בD, לכן עבור כל $z\neq z_0\in D$, $G\left(z\right)$ שווה למנה של שתי פונקציות אנליטיות עם מכנה שונה מאפס, ולכן G אנליטית ב$D\backslash z_0$. יתר על כן,

$$\lim_{z\to z_0}G\left(z\right)=\lim_{z\to z_0}\frac{f\left(z\right)-f\left(z_0\right)}{z-z_0}=f'\left(z_0\right)=G\left(z_0\right)$$

ולכן G רציפה בz_0.

כעת, $D\subset\mathbb{C}$ תחום קמור ובדקנו ש$G\left(z\right)$ מקיימת את התנאים של משפט 6 בתחום D. לכן אם $\gamma\subset D$ מסילה סגורה שאינה מכילה את z_0,

$$0=\int_{\gamma}G\left(z\right)\,\mathrm{d}z=\int_{\gamma}\frac{f\left(z\right)-f\left(z_0\right)}{z-z_0}\mathrm{d}z=\int_{\gamma}\frac{f\left(z\right)}{z-z_0}\mathrm{d}z-\int_{\gamma}\frac{f\left(z_0\right)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

נעביר אגף להסיק

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f\left(z\right)}{z-z_0}\mathrm{d}z=...$$

הגדרה

מסילת ג'ורדן היא מסילה סגורה ב$\mathbb{C}$($=\mathbb{R}^2$) שאינה חותכת את עצמה.

משפט ג'ורדן

אם $\gamma\subset\mathbb{C}$ מסילת ג'ורדן אז $\mathbb{C}\backslash\gamma$ מכיל בדיוק שני מרכיבים, ה"פנים" וה"חוץ" של γ.

מסקנה

נניח שD תחום ב$\mathbb{C}$ החסום ע"י מסילת ז'ורדן γ. אז לכל $z_0\in D$

$$\mathrm{Ind}_{\gamma}\left(z_0\right)=\oint_{\gamma}\frac{1}{z-z_0}\mathrm{d}z=1$$

מסקנה למשפט 7

יהי $D\subset\mathbb{C}$ תחום קמור, ותהי $f\left(z\right)$ מוגדרת ואנליטית בD. עוד נניח שγ היא מסילת ז'ורגן בD. אז לכל z_0 בתוך γ

$$f\left(z_0\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f\left(z\right)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

הסבר: $1=\mathrm{Ind}_{\gamma}\left(z_0\right)$

משפט 8(משפט ליוביל)

פונקציה שלימה וחסומה קבועה.

הוכחה

הנתון הוא ש$f\left(z\right)$ מוגדרת ואנליטית במישור $\mathbb{C}$ כולו, וקיים $k>0$ כך ש<u>לכל</u> $z\in\mathbb{C}$, $\left|f\left(z\right)\right|\leq k$. צ"ל ש$f\left(z\right)$ קבועה.

לצורך זה ניקח שתי נקודות z_1 וz_2 ב$\mathbb{C}$ ונוכיח ש$f\left(z_1\right)=f\left(z_2\right)$.

ובכן: עבור כל $R>0$ מספיק גדול העיגול $\left\{z\middle||z|<R\right\}$ מכיל גם את z_1 וגם את z_2. ע"י משפט 7 ומסקנתו:

$$f\left(z_1\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\frac{f\left(z\right)}{z-z_1}\mathrm{d}z$$

$$f\left(z_2\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\frac{f\left(z\right)}{z-z_2}\mathrm{d}z$$

לכן

$$f(z_1) - f(z_2) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\left[\frac{f(z)}{z-z_1} - \frac{f(z)}{z-z_2}\right]\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\frac{f(z)(z_1-z_2)}{(z-z_1)(z-z_2)}\mathrm{d}z$$

נובע:

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\frac{f(z)(z_1-z_2)}{(z-z_1)(z-z_2)}\mathrm{d}z\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}ML \leq \frac{1}{2\pi}\frac{k|z_1-z_2|}{(R-|z_1|)(R-|z_2|)}$$

כאן השתמשנו באי שוויון המשולש גירסה 2

$$|z-z_1| \geq ||z|-|z_1|| = R-|z_1|$$

$$|z-z_2| \geq R-|z_2|$$

כיוון ש-$f(z)$ פונקציה שלימה אפשר לבחור R גדול כרצוננו, ונשאיף $R \to \infty$ לומר

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq \lim_{R\to\infty}\frac{k|z_1-z_2|R}{(R-|z_1|)(R-|z_2|)} = \lim_{R\to\infty}\frac{k|z_1-z_2|\,{}^1\!/\!_{\mathrm{R}}}{\left(1-\frac{|z_1|}{R}\right)\left(1-\frac{|z_2|}{R}\right)} = \frac{0}{1} = 0$$

מכאן ש-$f(z_1) = f(z_2)$ הדבר נכון <u>לכל</u> שתי נקודות $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. לכן $f(z)$ קבועה.

$\blacksquare$

הערות

1. משפט ליוביל נכון רק לפונקציות שלמות. אבל אם $D \subsetneq \mathbb{C}$, אפילו תחום לא חסום, ייתכן בהחלט ש-$f(z)$ אנליטית ב-D, חסומה, ולא קבועה. למשל

$$D = \mathrm{RHP} = \{z = x+iy | x > 0\}$$

הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z+1}$ אנליטית בD וחסומה בD כי $|f(z)|=\frac{1}{|z+1|}$. כידוע $|z+1|$ = המרחק מz לנקודה (-1). ואם $z\in D$, מרחק זה≤ 1.
ז.א. $|z+1|\geq 1$ לכל $z\in D$. נובע שאם $z\in D$,

$$|f(z)|=\frac{1}{|z+1|}\leq 1$$

ז.א. $f(z)$ חסומה בD אבל לא קבועה.

2. האנלוגיה של משפט ליוביל לפונקציות ממשיות מאוד לא נכונה. למשל $f(x)=\sin x$ מוגדרת וגזירה בכל $\mathbb{R}$. היא חסומה:

$$|f(x)|=|\sin x|\leq 1$$

לכל $x\in\mathbb{R}$. אבל היא לא קבועה, כידוע!
לעומת זאת הפונקציה $f(z)=\sin z$ פונקציה שלימה ולא קבועה, אבל היא <u>לא חסומה</u>! ולכן אין סתירה למשפט ליוביל.

משפט 9(המשפט היסודי של אלגברה)

יהי $P(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ פולינום מרוכב(ז.א. כל $a_k\in\mathbb{C}$) ולא קבוע. אזי קיים לP שורש מרוכב: ז"א קיים $z_0\in\mathbb{C}$ כך ש$P(z_0)=0$.

הוכחה

נרשום:

$$P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$$

כאשר $n\geq 1$(כי P לא קבוע) ו$a_n\neq 0$(כי P ממעלה n) לכל $z\neq 0$.

$$P(z)=z^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\frac{a_{n-2}}{z^2}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right)=z^nr(z)$$

נשאיף $|z|\to\infty$. אז

$$|z^n|\to\infty$$

$$r(z)\to a_n\neq 0$$

לכן

$$\lim_{|z|\to\infty}|p(z)|=\infty$$

המשך ההוכחה יהיה בדרך השלילה. ז.א. נניח שאין ל$P\left(z\right)$ אף שורש מרוכב. אז נגדיר

$$q\left(z\right)={}^{1}\!/_{\mathrm{P(z)}}$$

כיוון שתמיד $P\left(z\right)\neq0$, $q\left(z\right)$ פונקציה שלימה.
כיוון ש$\lim\limits_{|z|\to\infty}\left|P\left(z\right)\right|=\infty$, $\lim\limits_{|z|\to\infty}q\left(z\right)=0$. ז"א עבור $\epsilon=1$(למשל) קיים $R>0$ כך שאם $|z|>R$, $\left|q\left(z\right)\right|\leq1$.
לעומת זאת: בעיגול $\{z||z|\leq R\}$ $q\left(t\right)$ רציפה בקבוצה סגורה וחסומה.
לפי משפט ווירשטרס קיים $M>0$ כך שלכל z, $|z|\leq R$ מתקיים $\left|q\left(z\right)\right|\leq M$. לכן אם נגדיר $M_{1}=\max\left(1,M\right)$ אז $\left|q\left(z\right)\right|\leq M_{1}$ לכל $z\in\mathbb{C}$.
ז"א $q\left(z\right)$ פונקציה שלימה וחסומה. לפי משפט ליוביל, $q\left(z\right)=C$(קבוע). אם כן $P\left(z\right)={}^{1}\!/_{\mathrm{q(z)}}={}^{1}\!/_{\mathrm{C}}$ קבוע. אבל זה סותר את הנתון ש$P\left(z\right)$ לא קבועה.
הסתירה מוכיח את המשפט.

■