תרגול כיתה 3 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

הכלה וההדחה, הסתברות אלמנטרית על קבוצות, משתנים מקריים

מתרגלים: ליאור דקל ואדם צ'פמן

נוסחת ההכלה וההדחה ההסתברותית

יהיו $A_1, A_2, ..., A_n$ מאורעות, אזי:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = S_1 - S_2 + S_3 - ... + \left(-1\right)^{n-1} S_n$$

כאשר:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right), \quad S_2 = \sum_{1\le i<j\le n} P\left(A_i \cap A_j\right), \quad S_3 = \sum_{1\le i<j<k\le n} P\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right),$$
$$\ldots \quad S_n = P\left(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n\right)$$

שאלה 1

מגרילים מספר טבעי מהטווח $\left[1,2,...,30k\right]$ $\left(k \in \mathbb{N}\right)$. מה ההסתברות שאינו מתחלק ב- 2 או 3 או 5?

פתרון:

המאורע המבוקש $1 - P\left(E\right) = 1 - P\left(E_2 \cup E_3 \cup E_5\right)$

כאשר המאורע E_i – "המספר המוגרל מתחלק ב- i" $\left(i = 2,3,5\right)$.

מכיוון שעלולה להיות חפיפה, מס' מתחלק ביותר מגורם אחד (למשל 6 מתחלק ב-2 ו-3) – ההסתברות המבוקשת מתקבלת בעזרת נוסחת ההכלה וההדחה:

$$P\left(E_2 \cup E_3 \cup E_5\right) = \left[P\left(E_2\right) + P\left(E_3\right) + P\left(E_5\right)\right]$$
$$-\left[P\left(E_2 \cap E_3\right) - P\left(E_2 \cap E_5\right) - P\left(E_3 \cap E_5\right)\right] + P\left(E_2 \cap E_3 \cap E_5\right)$$

נחשב כ"א מהמרכיבים שלעיל:

$$\left|E_2\right| = 15k, \left|E_3\right| = 10k, \left|E_5\right| = 6k \qquad \left|E_2 \cap E_3\right| = 5k, \left|E_2 \cap E_5\right| = 3k, \left|E_3 \cap E_5\right| = 2k$$
$$\left|E_2 \cap E_3 \cap E_5\right| = k$$

לכן ההסתברות המבוקשת

$$1 - P\left(E_2 \cup E_3 \cup E_5\right) = 1 - \frac{1}{30k}\left(\left[15k + 10k + 6k\right] - \left[5k - 3k - 2k\right] + k\right) = 1 - \frac{22}{30} = \frac{8}{30}$$

אלגברה של קבוצות/מאורעות

<u>פעולת האיחוד</u> – $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, קבוצת כל האיברים המופיעים או ב-A או ב-B או בשתיהן.

<u>פעולת החיתוך</u> – $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ קבוצת כל האיברים המופיעים גם ב-A וגם ב-B.

<u>המשלים</u> – $\bar{\mathrm{A}}$ (או A^C), קבוצת כל האיברים המופיעים ב- Ω אבל לא ב-A.

Ω – הקבוצה האוניברסלית. $\varnothing$ – הקבוצה הריקה.

<u>כללי דה-מורגן</u>: $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \bar{\mathrm{A}} \cap \bar{\mathrm{B}}$.(2) $\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \bar{\mathrm{A}} \cup \bar{\mathrm{B}}$.(1).

<u>חוק הסתברות איחוד מאורעות</u>: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

<u>שאלה 2</u>

א). הוכח: $P\left(E\cap F^C\right)=P\left(E\right)-P\left(E\cap F\right)$

ב). הוכח:

$$P\left[A^C\cap\left(B\cup C\right)\right]=P\left(B\right)+P\left(C\right)-\left[P\left(A\cap B\right)+P\left(A\cap C\right)+P\left(B\cap C\right)\right]+P\left(A\cap B\cap C\right)$$

ג). נתון: $P(A\cap B)=P(A\cap C)=\alpha,\;\; P(A)=4\alpha,\;\; P(B)=2\alpha$ $P(A^C\cap B^C\cap C)=0,$.

חשב: $P\left[A^C\cap\left(B^C\cup C\right)\right]$

<u>פתרון: (בסעיף ג' אפשר למצוא גם דרכים אחרות לפתרון)</u>

א).

$$P\left(E\cap F^C\right)=P\left(E\right)-P\left(E\cap F\right)$$

תמיד מתקיים $E=\left(E\cap F\right)\cup\left(E\cap F^C\right)$

לכן

$$P\left(E\right)=P\left[\left(E\cap F\right)\cup\left(E\cap F^C\right)\right]=P\left[\left(E\cap F\right)\right]+P\left[\left(E\cap F^C\right)\right]-\underbrace{P\left(E\cap F\cap F^C\right)}_{0}$$

$$=P\left[\left(E\cap F\right)\right]+P\left[\left(E\cap F^C\right)\right]\quad\square$$

ב).

$$P\left[A^C\cap\left(B\cup C\right)\right]=P\left[\left(A^C\cap B\right)\cup\left(A^C\cup C\right)\right]$$
$$=P\left(A^C\cap B\right)+\left(A^C\cup C\right)-P\left[A^C\cap\left(B\cap C\right)\right]$$
$$(*)=\left[P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)\right]+\left[P\left(C\right)-P\left(A\cap C\right)\right]-\left[P\left(B\cap C\right)+P\left(A\cap B\cap C\right)\right]\quad\square$$

(*) המעברים בשורה השלישית בעזרת התוצאה מסעיף א'.

ג).

$$P\left[\left(B^C\cup C\right)\cap A^C\right]$$
$$=P\left[\left(A^C\cap B^C\right)\cup\left(A^C\cap C\right)\right]$$
$$=P\left(A^C\cap B^C\right)+P\left(A^C\cap C\right)-\underbrace{P\left[A^C\cap B^C\cap C\right]}_{0=given}$$
$$=P\left(A\cup B\right)^C+\underbrace{\left[P\left(C\right)-P\left(A\cap C\right)\right]}_{(\text{א})}$$
$$=\underbrace{1-P\left(A\cup B\right)}_{de-morgan}+\left[P\left(C\right)-P\left(A\cap C\right)\right]$$
$$=1-\left[P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)\right]+\left[P\left(C\right)-P\left(A\cap C\right)\right]$$
$$=1-\left[4\alpha+2\alpha-\alpha\right]+\left[3\alpha-\alpha\right]=1-3\alpha$$

משתנים מקריים בדידים, תוחלת ושונות

משתנה מקרי ממשי (מ"מ) X: פונקציה ממרחב המדגם לישר הממשי $X:\Omega\to\mathbb{R}$.

תוחלת של משתנה מקרי

$$E(X)=\sum_k k\cdot P(X=k)$$

טרנספורמציה לינארית: $E(aX+b)=aE(X)+b$

כאשר $g(X)$ פונקציה של מ"מ, התוחלת שלה: $E[g(X)]=\sum_k g(k)\cdot P(X=k)$

שונות של משתנה מקרי

$$Var(X)=E\{(X-E[X])^2\}=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$$

טרנספורמציה לינארית: $Var(aX+b)=a^2\cdot Var(X)$

שאלה 3

מסובבים 2 סביבונים זהים. על הפאות של כל סביבון מסומנים המספרים {1,1,2,3}.

א. נגדיר משתנה מקרי X = סכום 2 הסיבובים. מצא את התפלגות X.

ב. חשב את התוחלת והשונות של X.

ג. נגדיר משתנה חדש: $Y=4X-17$. מצא את התוחלת והשונות של Y.

ד. נגדיר משתנה חדש נוסף: $Z=\left(X-5\right)^2$. מצא את התפלגות Z וחשב את השונות שלו.

פתרון:

א). הערכים האפשריים של X הם- 2,3,4,5,6 וההסתברויות נתונות בטבלה הבאה:

$\{\omega\}$	{(1,1)}	{(1,2),(2,1)}	{(1,3),(2,2),(3,1)}	{(2,3),(3,2)}	{(3,3)}
X	2	3	4	5	6
P(X=k)	1/4	1/4	5/16	1/8	1/16

חישוב התאים:

$$P(X=1)=P(1)\cdot P(1)=1/2\cdot 1/2=1/4$$

$$P(X=3)=P(1)\cdot P(2)+P(2)\cdot P(1)=2\cdot 1/2\cdot 1/4=1/4$$

$$P(X=4)=P(1)\cdot P(3)+P(2)\cdot P(2)+P(3)\cdot P(1)=\left(1/2\cdot 1/4\right)+\left(1/4\cdot 1/4\right)+\left(1/4\cdot 1/2\right)=5/16$$

$$P(X=5)=P(2)\cdot P(3)+P(3)\cdot P(2)=2\cdot 1/4\cdot 1/4=1/8$$

$$P(X=6)=P(3)\cdot P(3)=1/4\cdot 1/4=1/16$$

(נשים לב שסכום התאים הוא 1) .

ב). התוחלת של X:

$$E(X)=\sum_k k\cdot P(X=k)=2\cdot 1/4+3\cdot 1/4+4\cdot 5/16+5\cdot 1/8+6\cdot 1/16=3.5$$

נוסחת העבודה לשונות של X: $Var(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$

חישוב עזר-

$$E(X^2)=\sum_k k^2\cdot P(X=k)=2^2\cdot 1/4+3^2\cdot 1/4+4\cdot 5/16+5^2\cdot 1/8+6^2\cdot 1/16=13.625$$

והשונות: $Var(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=13.625-3.5^2=1.375$

ג). המ"מ Y הוא טרנספורמציה לינארית של המ"מ X, לכן

$$E(Y) = E(4X+5) = 4\cdot E(X)+5 = 4\cdot 3.5-17 = -3$$

$$V(Y) = V(4X+5) = 4^2\cdot V(X) = 16\cdot 1.375 = 22$$

ד). נבנה את טבלת ההתפלגות של המשתנה Z (בהתייחס לטבלה המקורית):

X	2	3	4	5	6
P(X=k)	1/4	1/4	5/16	1/8	1/16
$Z = (X-5)^2$	9	4	1	0	1

נשים לב ש- Z מקבל רק 4 ערכים: Z = {0,1,4,9}, כלומר טבלת ההתפלגות שלו:

Z	0	1	4	9
$Z = (X-5)^2$	1/8	6/16	1/4	1/4

נוסחת השונות של Z: $Var(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$. נחשב כ"א מהמרכיבים

$$E(Z) = \sum_k k\cdot P(X=Z) = 9\cdot 1/4 + 4\cdot 1/4 + 1\cdot(5/16+1/16) + 0\cdot 1/8 = 3.625$$

$$E(Z^2) = \sum_k k^2\cdot P(X=Z) = 9^2\cdot 1/4 + 4^2\cdot 1/4 + 1^2\cdot(5/16+1/16) + 0^2\cdot 1/8 = 24.625$$

והשונות המבוקשת: $Var(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = 24.625 - 3.625^2 = 17.734$

<u>שאלה 4</u>

משתנה מקרי X מקבל את הערכים ...0,1,2 בהסתברות $P(X=i) = \frac{C}{3^i}, \quad i = 0,1,2...$

א. מצא את הערך של הקבוע C.
ב. את התוחלת של X.
ג. את ההסתברות ש- $X > 5$
ד. את ההסתברות ש-X לא זוגי.

<u>פתרון:</u>

א). מכיוון שנתונה פונ' הסתברות צ"ל $\sum_{i=0}^{\infty} P(X=i) = 1$

לכן $1 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C}{3^i} \qquad = 1 = C\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i \qquad \Rightarrow 1 = C\cdot\left(\frac{1}{1-1/3}\right) \qquad \Rightarrow C = 2/3$

סכום סדרה הנדסית $\left(|q|<1\right) \quad \sum_k a_k = \frac{a_1}{1-q}$

ב). התוחלת:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i\cdot P(X=i) = \sum_{i=0}^{\infty} i\cdot(2/3)\cdot\frac{1}{3^i} = 2/3\cdot\sum_{i=0}^{\infty} i\cdot\frac{1}{3^i}$$

$$= \frac{2}{3}\left[1\cdot(1/3) + 2\cdot(1/3)^2 + 3\cdot(1/3)^3 + ...\right] = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(1 + 2\cdot 1/3 + 3\cdot(1/3)^2 + ...\right)$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot\frac{1}{3^{i-1}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{3^i}\right)'}_{(***)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$(***) \quad \left(\frac{1}{1-q}\right)' = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot\frac{1}{3^i}\right)' = \frac{1}{(1-1/3)^2} = \frac{9}{4}$$

ג). ההסתברות לערכים הגדולים מ-5:

$$P(X>5)=1-P(\le 5)=1-2/3\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\right)^0+\left(\frac{1}{3}\right)^1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{3}\right)^5\right)=0.00137$$

ד). הסתברות לערכים אי זוגיים:

$$P(X\ odd)=1-P(X\ even)$$
$$=1-\sum_{k=0}^{\infty}P(X=2k)=1-2/3\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{2k}}=1-2/3\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k$$
$$=1-2/3\cdot\left(\frac{1}{1-1/9}\right)=1-3/4=1/4$$

<u>שאלה 5</u>

בשק נמצאים שישה תלושי הגרלה עם סכומי זכייה בש"ח: על שלושה רשום המספר 0,
על שניים המס' 20 ועל אחד המס' 40.
מהמר נדרש לשלם 20 ש"ח על מנת להשתתף בהגרלה. עליו למשוך שני תלושים מהשק והוא זוכה בסכום אשר שווה לממוצע החשבוני של שני המספרים ששלף. חשב את:

א. ההתפלגות הסכום שהמהמר מקבל.
ב. תוחלת הרווח ואת שונות הרווח של המהמר.

<u>פתרון:</u>

נגדיר שני מ"מ: X – את הסכום שהמהמר מקבל. Y – הרווח שלו. כאשר: $Y=X-20$.

א). נבנה את טבלת ההתפלגות

ההסתברות	המקרה $\{\omega\}$	הסכום המתקבל (X) = הממוצע
$\binom{3}{2}\Big/\binom{6}{2}=3/15$	0,0	0
$\binom{2}{1}\binom{3}{1}\Big/\binom{6}{2}=6/15$	0,20	10
$\binom{2}{2}\Big/\binom{6}{2}+\binom{3}{1}\binom{1}{1}\Big/\binom{6}{2}=4/15$	20,20 או 40,0	20
$\binom{1}{1}\binom{2}{1}\Big/\binom{6}{2}=2/15$	40,20	30

ב). התוחלת והשונות

$$E(X)=0\cdot(3/15)+10\cdot(6/15)+20\cdot(4/15)+30\cdot(2/15)=40/3$$
$$E(Y)=E(X-20)=E(X)-20=-20/3$$
$$Var(Y)=Var(X-20)=Var(X)$$
$$Var(x)=E(x^2)-E(X)^2=0\cdot(3/15)+10^2\cdot(6/15)+20^2\cdot(4/15)+30^2\cdot(2/15)-[40/3]^2$$
$$=800/9$$

<u>שאלה 6</u>

כד מכיל שמונה כדורים, מהם שלושה אדומים וחמישה כחולים. מוציאים מהכד כדורים בזה אחר זה ללא החזרה. נגדיר מ"מ X הסופר את מס' הכדורים האדומים שהוצאו עד הוצאת כדור כחול ראשון.
מצא את פונ' ההסתברות של X ואת פונ' ההתפלגות המצטברת שלו.

<u>פתרון:</u>

טבלת ההתפלגות המבוקשת להסתברות ולהתפלגות המצטברת:

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=\frac{15}{56}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{56}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{56}$
F(X)	$\frac{5}{8}$	$\frac{50}{56}$	$\frac{55}{56}$	1

חישוב התאים נעשה בעזרת הסתברויות מותנות (אפשר גם ע"י קומבינטוריקה אבל יותר מסורבל):
נסמן R_j, B_j את המאורעות "יצא כדור כחול (אדום) בהוצאה ה- j"

$$P(X=0)=P(B_1)=5/8$$
$$P(X=1)=P(R_1)P(B_2\,|\,R_1)=3/8\cdot 5/7=15/56$$
$$P(X=2)=P(R_1)P(R_2\,|\,R_1)P(B_3\,|\,R_2)=3/8\cdot 3/7\cdot 5/6=5/56$$
$$P(X=3)=P(R_1)P(R_2\,|\,R_1)P(R_3\,|\,R_2)P(4_4\,|\,R_3)=3/8\cdot 2/7\cdot 1/6\cdot 5/5=1/56$$

<u>שאלה 7</u>

משתנה מקרי X מתפלג כדלקמן:

$$(a\neq b\neq c\neq 0)\quad P(X=1)=c, P(X=0)=b, P(X=-1)=a$$

א. אם התוחלת והשונות שוות ל-0.5 , מצא את a, b, c.
ב. הוכח : $V(X)\leq 1$ (אין קשר לסעיף א').

<u>פתרון:</u>

א). נמצא ביטויים לתוחלת ולשונות

$$E(X)=\sum_{i=-1}^{1} i\cdot p(X=i)=(-1)a+0+1c=c-a$$
$$E(X^2)=(-1)^2a+0+1^2c=a+c$$
$$\Rightarrow V(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=a+c-(c-a)^2$$

מהנתון על שוויון התוחלת ושהונות נרכיב את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} c-a=1/2 \\ a+c-(c-a)^2=1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c-a=1/2 \\ a+c=3/4 \end{cases}$$
$$\Rightarrow c=\frac{5}{8},\qquad a=\frac{1}{8}$$

לבסוף נמצא את b (סכום ההסתברויות הוא 1)

$$a+b+c=1\quad \Rightarrow b=1/4$$

ב). נשתמש בביטוי הפרמטרי שמצאנו בסעיף א'

$$V(X)\leq a+c-(c-a)^2\leq a+c=1-b\leq 1$$

<u>שאלה 8</u>

בתיבה מפוזרים 20 פתקים. על כל פתק רשום מס' אחר בין 1 ל- 20. בכל סעיף התיבה מלאה בהתחלה.

א. מוציאים פתקים בזה אחר זה <u>ללא החזרה</u>. נגדיר מ"מ X – מס' הפתקים שהוצאו עד הוצאת הפתק עם 7. חשב את התפלגות X.

ב. מוציאים פתקים בזה אחר זה <u>עם החזרה</u>. נגדיר מ"מ Y – הפתק עם 7 נשלף בהוצאה ה-k, $k=1,\dots,20$ (שים לב: לא נאמר דבר לגבי k-1 ההוצאות האחרות). חשב את התפלגות Y.
מצא ביטוי לתוחלת של Y כאשר סה"כ מספר הפתקים בתיבה הוא n.

ג. מוציאים פתקים בזה אחר זה <u>עם החזרה</u>. לפני ההחזרה רושמים את מספרו של כל פתק שהוצא.
נגדיר מ"מ Z – מס' הפתקים המתחלקים ב-5 ללא שארית שנרשמו בהוצאת 3 פתקים סה"כ.
חשב את התפלגות Z.

<u>פתרון:</u>

א). התפלגות X:

P(X = 1) = P(7 בהוצאה ראשונה) = 1/20

P(X = 2) = P(7 בהוצאה שנייה|לא 7 בהוצאה ראשונה)P(לא 7 בהוצאה ראשונה) = $\frac{19}{20}\cdot\frac{1}{19}=\frac{1}{20}$

$$P(X=3)=\frac{19}{20}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{1}{18}=\frac{1}{20}$$

ניתן לראות את מהתבנית כי ההתפלגות: $k=1,2,\dots,20$ $\qquad P(X=k)=\frac{1}{20}$

ב). התפלגות Y: לכל פתק אותה הסתברות להוצאה בכל שליפה (מרחב הסתברות אחיד/סימטרי) לכן

$$P(Y=k)=\frac{1}{20} \qquad k=1,2,\dots,20$$

הערה: קיבלנו שההתפלגות להוצאת "7" ללא החזרה מהתיבה (סעיף א') שווה להתפלגות הוצאת "7" עם החזרה בשליפה ה-k.

התוחלת של Y (נפתח לפי הגדרת התוחלת):

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}k\cdot P(Y=k)=1\cdot\frac{1}{n}+\dots+n\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{n+1}{2}$$

ג). התפלגות Z:

יש 4 מס' שמתחלקים ב-5 ללא שארית (5,10,15,20), ההסתברות שפתק כזה יישלף היא $4/20=1/5$.

חישוב ההסתברויות של Z:

$$P(X=0)=\left(\frac{4}{5}\right)^3$$

$$P(X=1)=\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)\binom{3}{1}$$

$$P(X=2)=\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)^2\binom{3}{2}$$

$$P(X=3)=\left(\frac{1}{5}\right)^3$$