תרגיל בית 9 מבוא לתורת החבורות
88-211 סמסטר א' תשע"ז

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך ב' שבת ה'תשע"ז, 5.2.2017.

הערה. לאורך התרגיל נסמן את מספר תת-חבורות p-סילו של חבורה G ב $n_p(G)$ או ב n_p.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. מה סדר ת"ח 2-סילו של חבורה מסדר 80?

שאלה 2. בחר בעזרת משפט קיילי שיכון $U_{12} \hookrightarrow S_4$, ורשום מפורשות את התמונה.

שאלה 3. כלי עזר: תהי G חבורה ו H_1, H_2 תת-חבורות שונות מסדר p. הוכיחו כי

$$H_1 \cap H_2 = \{e\}$$

שאלה 4. תהי G חבורה סופית. ויהי $g \in G$ איבר מסדר k. אזי שיכון קיילי שולח את g למכפלת מחזורים זרים מאורך k.

שאלות להגשה

שאלה 5. תהי G חבורה פשוטה מסדר n כאשר $n > 2$. הוכיחו כי קיים שיכון $G \hookrightarrow A_n$.

שאלה 6. נתבונן בחבורת הסימטריה S_p עבור p מספר ראשוני.

א) כמה איברים מסדר p יש בחבורה?

ב) חשבו בעזרת סעיף א' את מספר התת-חבורות מסדר p בS_p.

ג) היעזרו בסעיף הקודם כדי להוכיח כי לכל מספר ראשוני p מתקיים

$$(p-1)! \equiv (-1) \mod p$$

זהו משפט וילסון.

שאלה 7. א) תהי $H \leq G$ תת-חבורה ו$P \leq H$ תת-חבורה p-סילו של H. הוכיחו כי קיימת P' תת-חבורה p-סילו של G כך ש- $P' \cap H = P$.

ב) תהי $H \lhd G$ תת-חבורה נורמלית בG. ותהי P תת-חבורה p-סילו של G. הוכיחו כי $H \cap P$ היא תת-חבורה p-סילו של H. בפרט $n_p(H) \leq n_p(G)$.

שאלה 8. תהי G חבורה מסדר p^2q עבור מספרים ראשוניים שונים p, q.
בעזרת השאלה 3 בחימום, הוכיחו כי G אינה פשוטה.

שאלה 9. א) תהי G חבורה מסדר pq עבור מספרים ראשוניים $p > q$ שונים כך ש $p \not\equiv 1 \mod q$. הוכיחו כי G צקלית.
(הדרכה: חשבו n_p, n_q והסיקו כמה איברים יש מכל סדר בחבורה).

ב) תהי G חבורה מסדר 55 שיש בה יותר מ4 איברים מסדר 5. הוכיחו כי G אינה אבלית.

שאלה 10. תהי G חבורה מסדר 12 ויהיו n_2 ו-n_3 מספר התת-חבורות 2-סילו ו 3-סילו בהתאמה.

א) מהם ערכי n_2 האפשריים? (הביאו דוגמאות לכך שערכים אלו אכן אפשריים).

ב) מהם ערכי n_3 האפשריים? (הביאו דוגמאות לכך שערכים אלו אכן אפשריים).

ג) האם יתכן ש $n_2 = 3$ ו $n_3 = 4$?

שאלה 11. הוכיחו כי אין חבורה פשוטה מסדר 150.
רמז: היעזרו במשפט העידון של קיילי.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 12. בשאלה זו נוכיח את משפט סילו הראשון בדרך אחרת:

א) הוכיחו כי כל חבורה סופית מסדר n ניתן לשכן ב $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ (רמז: מטריצת פרמוטציה).

ב) הוכיחו כי אם לחבורה G סופית יש ת"ח p-סילו, אז גם לת"ח $H \leq G$ יש ת"ח p-סילו.
(הנחייה: הסתכלו על הפעולה של H על המנה של G עם ת"ח p-סילו Q ע"י כפל משמאל.
הראו שהמייצב $Stab(gQ) = H \cap gQg^{-1}$ ומצאו ת"ח סילו מבין המייצבים.).

ג) מצאו ל $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ ת"ח p-סילו.

ד) הסיקו: לכל חבורה סופית יש ת"ח p-סילו.

שאלה 13. תהי G חבורה מסדר n. הוכיחו כי שיכון $G \hookrightarrow S_n$ הניתן ע"י משפט קיילי אינו שיכון לתוך A_n אם ורק אם ת"ח 2-סילו של G היא ציקלית ולא טריוויאלית.
הנחייה: ראו תרגיל 4 בחימום.

בהצלחה!