

אלגברה מופשטת 1 תשע"ו - תרגיל בית 4

10 בנובמבר 2015

1. א. הוכיחו שבחבורת הסימטריה S_n כל שני מחזורים זרים מתחלפים זה עם זה.
ב. הוכיחו אם שני מחזורים לא זרים מתחלפים זה עם זה, אם כל אחד מהם הוא חזקה אחד של השני. (הדרכה: נניח ש s, t מחזורים מתחלפים שאינם זרים. ראשית הראו ש $\text{supp}(s) = \text{supp}(t)$ עכשיו הניחו ש- $s = (1, 2, \dots, n)$ והעזרו בכך ש- t מתחלף עם כל חזקה של s כדי להראות ש- t חזקה של s . הראו שגם t הוא חזקה של s . הסבירו מדוע זה מוכיח את המקרה הכללי).

2. נתונה תמורה ב- S_9 ,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 6 & 2 & 1 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

א. רשמו את σ כמכפלת מחזורים זרים.

ב. מצאו את הסדר של σ .

ג. מהו הסדר של σ^{14} ?

ד. מצאו את σ^{-1} וכתבו אותה כמכפלה של מחזורים זרים.

3. א. הוכיחו שכל תת חבורה נוצרת סופית של $(Q, +)$ היא ציקלית.

ב. הראו ש- $(Q, +, 0)$ אינה נוצרת סופית.

4. א. הוכיחו שבחבורה נוצרת סופית אין שרשרת אינסופית עולה של תת חבורות.

ב. תנו דוגמא לשרשרת אינסופית יורדת של תת חבורות של חבורה נוצרת סופית.

5. הוכיחו שחבורה H הנוצרת ע"י שני איברים a ו- b עבורם מתקיים $ab = ba$ היא אבלי.

6. הוכיחו כי איחוד של שרשרת עולה של תת חבורות הוא תת חבורה.