תרגיל בית 10 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א׳ תש״ף

שאלה 1. מצאו בעזרת משפט קיילי שיכון $\varphi\colon U_8 \to S_4$ וכתבו אותו באופן מפורש.

שאלה 2. תהי G חבורה ותהי $G \triangleright H$. ראיתם במשפט האיזומורפיזם הרביעי (משפט ההתאמה) את הקשר בין תת־חבורות של G/H לבין תת־חבורות של G המכילות את H.

1. הוכיחו שאם $K_1, K_2 \in G$ תת־חבורות המכילות את H, אז

$$(K_1/H) \cap (K_2/H) = (K_1 \cap K_2)/H$$

2. מכך שאנו יודעים שתת־החבורה הגדולה ביותר של G שמוכלת ב-K_1 וב-K_2 היא $K_1 \cap K_2$, נסחו והוכיחו טענה דומה עבור $(K_1 \cap K_2)/H$.

שאלה 3. תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$. הוכיחו שאם $N_1, N_2 \triangleleft G$ תת־חבורות נורמליות המקיימות $N_1 \cap H = N_2 \cap H$, אז $(HN_1)/N_1 \cong (HN_2)/N_2$.

שאלה 4. תהי G חבורה מסדר n, ויהי $\varphi : G \to S_n$ שיכון קיילי. הוכיחו ש$g \in G$ הוא מסדר m אמ״ם $\varphi(g)$ הוא מכפלה של $\frac{n}{m}$ מחזורים זרים.

שאלה 5. תהי G חבורה סופית ותהינה $H, N \leq G$ תת־חבורות.

1. הפריכו ש-$HN \leq G$ היא תמיד תת־חבורה.
2. אם $H, N \triangleleft G$ נורמליות כך ש-$([G:H], [G:N]) = 1$, הוכיחו כי $G = HN$.
אתגר רשות: אפשר לוותר על הדרישה לנורמליות, והטענה תשאר נכונה!

שאלה 6. תהי שרשרת עולה של חבורות $G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3 \subseteq \ldots$, ונסמן $H = \bigcup_i G_i$ עבור איחודן. אפשר לקבל כעובדה שגם H היא חבורה (זו הייתה מסקנה של שאלת רשות 9 בתרגיל בית 4).

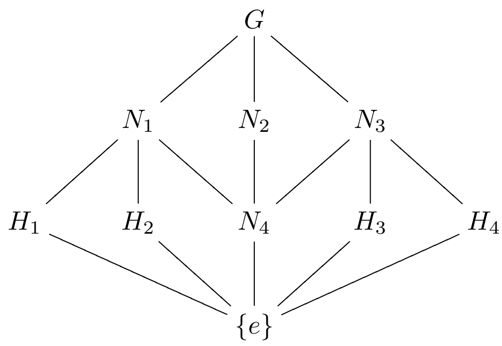
1. הוכיחו שאם G_i היא חבורה פשוטה לכל i, אז גם H פשוטה.
הערה: כך ניתן ליצור חבורות פשוטות אינסופיות מחבורות פשוטות סופיות.
2. תהי S חבורה פשוטה אינסופית. הוכיחו שאם $K \leq S$ תת־חבורה, אז $[S:K] = 1$ או $[S:K] = \infty$. רמז: העידון של משפט קיילי.

שאלה 7. תהי G חבורה סופית, ו$N \triangleleft G$ תת-חבורה נורמלית כך ש $([G\colon N], |N|) = 1$. הוכיחו בעזרת משפטי האיזומורפיזם שאין ב-G עוד תת-חבורה מסדר $|N|$. (רמז: הוכיחו ש$[H : H \cap N] = 1$ לכל תת חבורה H מסדר $|N|$.)

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 8. תהי חבורה G עם סריג תת־החבורות הבא:



כאשר $H_i \leq G$ ו-$N_i \lhd G$. הוכיחו כי $G \cong D_4$.

רמז: סמנו $k = [G : N_1]$ והשתמשו כמה פעמים במשפטי האיזומורפיזמים. כנראה בדרך תצטרכו להוכיח ש-k ראשוני, ואז מוכרח להיות $k = 2$.