

אנליזה מודרנית תש"ף - תרגיל 2

להגשה עד 20.11.19

שאלה 1

לכל אוסף קבועו האם הוא אלגברה והאם הוא σ -אלגברה:

1. $S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3, 4\}\}, X = \{1, 2, 3, 4\}$

2. $S = \{\emptyset\} \cup \{A : [0, \frac{1}{2}] \subseteq A\}, X = [0, 1]$

3. $S = \{A : \{0, 1\} \subseteq A \text{ or } A \cap \{0, 1\} = \emptyset\}, X = [0, 1]$

4. $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ו- $A \in S$ אם לכל סדרה $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ מתקיים:

$$\{(y_n)_{n \in \mathbb{N}} : y_1 = x_1\} \subseteq A$$

שאלה 2

תהי $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ סדרת פונקציות רציפות על הקטע $[0, 1]$. הוכיחו כי הקבוצה

$$A = \{x : f_n(x) \rightarrow 0\}$$

מדידה לבג.

שאלה 3

תהי m מידת לבג ו- $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ סדרת קבוצות מדידות ב- $[0, 1]$. נגדיר $F = \{x | \forall n \in \mathbb{N} \exists k > n : x \in A_k\}$. הוכיחו:

1. $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

2. אם $m(A) > \delta > 0$ לכל n אז $m(F) > \delta$.

3. אם $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$ אז $m(F) = 0$.

4. קיימת סדרה $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ כך ש- $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty$ ו- $m(F) = 0$.

שאלה 4

הגדרנו בתרגול את קבוצת קנטור C . הוכיחו כי קבוצת קנטור היא:

1. קומפקטית.
2. לא מכילה אף קטע בעל מידה חיובית.
3. אינה איחוד בן מניה של קטעים סגורים.

שאלה 5

תהי X קבוצה, ו- $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$ אוסף תת-קבוצות שלה. הראו כי לכל $F \in \sigma(\mathbb{A})$ קיימת משפחה בת-מניה $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ כך ש- $F \in \sigma(\mathbb{B})$.

הדרכה: הראו כי קבוצת הקבוצות ב- $\sigma(\mathbb{A})$ המקיימות תכונה זו היא σ -אלגברה. לאחר מכן הראו כי הקבוצות ב- \mathbb{A} מקיימות תכונה זו והסיקו את הנדרש.