מבוא לאלגברה לינארית
תרגיל 3 - פתרון

.1

א. $A=\begin{pmatrix}3&2\\7&5\end{pmatrix}$

פתרון:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}3&2&1&0\\7&5&0&1\end{array}\right)\ \tfrac{1}{3}R_1\to R_1\left(\begin{array}{cc|cc}1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\7&5&0&1\end{array}\right)R_2-7R_1\to R_2\left(\begin{array}{cc|cc}1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&\frac{1}{3}&-\frac{7}{3}&1\end{array}\right)$$

$$3R_2\to R_2\left(\begin{array}{cc|cc}1&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&1&-7&3\end{array}\right)R_1-\tfrac{2}{3}R_2\to R_1\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&5&-2\\0&1&-7&3\end{array}\right)$$

ולכן המטריצה A הפיכה ו- $A^{-1}=\begin{pmatrix}5&-2\\-7&3\end{pmatrix}$.

נרשום את המטריצות האלמנטריות המתאימות:

$$E_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow E_1^{-1}=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$E_2=\begin{pmatrix}1&0\\-7&1\end{pmatrix}\Rightarrow E_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\7&1\end{pmatrix}$$

$$E_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}\Rightarrow E_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$E_4=\begin{pmatrix}1&-\frac{2}{3}\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow E_4^{-1}=\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}\\0&1\end{pmatrix}$$

ואז $A=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}$ ו- $A^{-1}=E_4E_3E_2E_1$

ב. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\14&16&18\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\4&5&6&0&1&0\\14&16&18&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}R_3-14R_1\to R_3\\R_2-4R_1\to R_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-6&-4&1&0\\0&-12&-24&-14&0&1\end{array}\right)$$

$$R_3-4R_2\to R_3\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-6&-4&1&0\\0&0&0&2&-4&1\end{array}\right)$$

קיבלנו שורת אפסים $\Leftarrow$ המטריצה אינה הפיכה.

ג. $A=\begin{pmatrix}1&3&4\\3&-1&6\\-1&5&1\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&4&1&0&0\\3&-1&6&0&1&0\\-1&5&1&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{l}R_3+R_1\to R_3\\R_2-3R_1\to R_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&4&1&0&0\\0&-10&-6&-3&1&0\\0&8&5&1&0&1\end{array}\right)$$

$$5R_3+4R_2\to R_3\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&4&1&0&0\\0&-10&-6&-3&1&0\\0&0&1&-7&4&5\end{array}\right)R_2+6R_3\to R_2\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&4&1&0&0\\0&-10&0&-45&25&30\\0&0&1&-7&4&5\end{array}\right)$$

$$-\frac{1}{10}R_2\to R_2\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&4&1&0&0\\0&1&0&\frac{45}{10}&-\frac{25}{10}&-3\\0&0&1&-7&4&5\end{array}\right)R_1-4R_3\to R_1\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&29&-16&-20\\0&1&0&\frac{45}{10}&-\frac{25}{10}&-3\\0&0&1&-7&4&5\end{array}\right)$$

$$R_1-3R_2\to R_1\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{155}{10}&-\frac{85}{10}&-11\\0&1&0&\frac{45}{10}&-\frac{25}{10}&-3\\0&0&1&-7&4&5\end{array}\right)$$

לסיכום: $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{155}{10}&-\frac{85}{10}&-11\\\frac{45}{10}&-\frac{25}{10}&-3\\-7&4&5\end{pmatrix}$.

נרשום את המטריצות האלמנטריות המתאימות

$$E_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow E_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow E_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}\Rightarrow E_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$E_4=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&4&1\end{pmatrix}\Rightarrow E_4^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-4&1\end{pmatrix}$$

$$E_5=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&6\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow E_5^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-6\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_6=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{10}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow E_6^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-10&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_7=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow E_7^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_8=\begin{pmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow E_8^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

שימו לב בתהליך הדירוג (במעבר השני) עשינו 2 פעולות אלמנטריות ולכן נקבל שתי מטריצות אלמנטריות המתאימות לפעולות הללו

לסיכום נקבל $A=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}E_5^{-1}E_6^{-1}E_7^{-1}E_8^{-1}$ ו- $A^{-1}=E_8E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1$.

.2

נעביר x_4,x_5 במערכת הנתונה לאגף ימין ונקבל:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3=1+x_4-x_5\\ -x_2+x_3=2-2x_4+x_5\\ 2x_1+3x_2+8x_3=3-x_4-2x_5\end{cases}$$

או בצורה אחרת :

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+x_4-x_5\\ 2-2x_4+x_5\\ 3-x_4-2x_5\end{pmatrix}$$

היות ומטריצה A הפיכה נקבל :

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 8\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1+x_4-x_5\\ 2-2x_4+x_5\\ 3-x_4-2x_5\end{pmatrix}$$

כאשר x_4, x_5 משתנים חופשיים.

ולכן נותר למצוא את A^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) R_3-2R_1\to R_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$R_2-R_3\to R_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}-1\cdot R_3\to R_3\\ R_3\leftrightarrow R_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1\end{array}\right)$$

$$R_1-2R_2-4R_3\to R_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -11 & -4 & 6\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1\end{array}\right)$$

לבסוף נקבל :

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11 & -4 & 6\\ 2 & 0 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+x_4-x_5\\ 2-2x_4+x_5\\ 3-x_4-2x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-9x_4-5x_5\\ -1+3x_4\\ 1+x_4+x_5\end{pmatrix}$$

ולסיכום הפתרון הכללי של המערכת הוא:

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}-9\\ 3\\ 1\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}-5\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

כאשר x_4, x_5 משתנים חופשיים.

אח"כ שיניתי את השאלה ל-

$$\begin{cases}x+2y+4z=1\\ -y+z=2\\ 2x+3y+8z=3\end{cases}$$

במקרה זה

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -4 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.3

א. נתון $B^3 = 0$ ו $A = I_n - B$
צ"ל A הפיכה.

<u>הוכחה:</u> על מנת להוכיח ש A הפיכה מספיק להראות שקיימת מטריצה C כך ש $AC = CA = I_n$.

ניקח $C = I_n + B + B^2$ נראה שאכן $AC = CA = I_n$.

$$(I_n - B)(I_n + B + B^2) = I_n^2 + I_nB + I_nB^2 - BI_n - B^2 - \underbrace{B^3}_{=0} = I_n$$

באופן דומה $(I_n + B + B^2)(I_n - B) = I_n$

$\Leftarrow$ $A = I_n - B$ הפיכה וכן $A^{-1} = I_n + B + B^2$.

□

ב.
$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & r & s \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & r & s \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & rt \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & rt \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & r & s \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftarrow \quad (I_n - B)^{-1} = (I_n + B + B^2) = \begin{pmatrix} 1 & r & s+rt \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.4

א. נתון: $A^2 = 0$
צ"ל A אינה הפיכה.

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה ש A הפיכה, אזי קיימת A^{-1} כך ש $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
נכפול את שני האגפים של $A^2 = 0$ ב A^{-1}
ונקבל $A^{-1}A^2 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{=I}A = 0 \Leftrightarrow A = 0$ בסתירה להנחה ש A הפיכה.
ולכן הנחת השלילה לא נכונה $\Leftarrow$ A אינה הפיכה.

□

ב. נתון: $A^2 = A$ ו $A \neq I_n$.
צ"ל A אינה הפיכה.

<u>הוכחה</u>: נניח בשלילה ש A הפיכה, אזי קיימת A^{-1} כך ש $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

נכפול את שני האגפים של $A^2 = A$ ב A^{-1}

ונקבל $A^{-1}A^2 = A^{-1}A \Leftrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{=I_n}A = I_n \Leftrightarrow A = I_n$ בסתירה לנתון ש $A \neq I_n$.

ולכן הנחת השלילה לא נכונה $\Leftarrow A$ אינה הפיכה.

□

טל"ח