

תרגיל 2 – חשבון אינפיניטסימלי 2 למדעי המחשב

1. היעזרו באינטגרלים מסוימים מתאימים על מנת לחשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{\pi k}{2n}\right) \quad (\text{ב})$$

2. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

רמז: היעזרו בפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$.

3. הפונקציה f רציפה ואי-שלילית בקטע $[a, b]$ ומקיימת $\int_a^b f(t) dt = 0$. הוכיחו כי $f \equiv 0$ ב- $[a, b]$.

הצעה: היעזרו בפונקציה $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

4. עבור איזה ערך של x האינטגרל $\int_x^{x+3} t \cdot (5-t) dt$ מקבל ערך מקסימלי? מהו הערך המקסימלי?

5. (א) גזרו את הפונקציה $F(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{1+t} dt$.

(ב) חשבו את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{1+t} dt$.