פתרון בוחן בדידה 88-195

24.7.23, ו' אב תשפ"ג

1. יהיו A, B פסוקים. נגדיר סדרת פסוקים כך:
$P_1 = A, P_2 = B, \forall n \geq 3 : P_n = P_{n-1} \to P_{n-2}$.
הוכיחו כי לכל n זוגי $P_n \equiv B$.
פתרון:
נוכיח באינדוקציה על הזוגיים:
$n = 2$: נתון $P_2 = B$.
נניח כי הטענה נכונה עבור n זוגי ונראה כי היא נכונה עבור $n+2$.
לפי הגדרת סדרת הפסוקים:
$P_{n+2} = P_{(n+2)-1} \to P_{(n+2)-2} = P_{n+1} \to P_n =$
$(P_{(n+1)-1} \to P_{(n+1)-2}) \to P_n = (P_n \to P_{n-1}) \to P_n$
לפי הנחת האינדוקציה $P_n \equiv B$. נציב במשוואה ונקבל:
$P_{n+2} \equiv (B \to P_{n-1}) \to B$.
נכתוב טבלת אמת:

B	P_{n-1}	$B \to P_{n-1}$	$(B \to P_{n-1}) \to B$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	0

אזי $P_{n+2} \equiv (B \to P_{n-1}) \to B \equiv B$, כדרוש.

2. תהיינה $A, B, C \subseteq U$ קבוצות. הוכיחו/הפריכו:
א. $P(A \setminus B) = P(A) \setminus P(B)$.
ב. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
פתרון:
א. לא נכון, הפרכה:
$A = B = \emptyset$.
$P(A \setminus B) = P(\emptyset \setminus \emptyset) = P(\emptyset) = \{\emptyset\}$
$P(A) \setminus P(B) = P(\emptyset) \setminus P(\emptyset) = \emptyset$
ב. נכון. הוכחה:
$\iff x \in A \setminus (B \cup C)$
$\iff x \in A \wedge x \notin (B \cup C)$ (הגדרת הפרש)
$\iff x \in A \wedge x \in (B \cup C)^c$ (הגדרת משלים)
$\iff x \in A \wedge x \in (B^c \cap C^c)$ (דה-מורגן)
$\iff x \in A \wedge (x \in B^c \wedge x \in C^c)$ (הגדרת חיתוך)
$\iff x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)$ (הגדרת משלים)

$\iff (x \in A \wedge x \in A) \wedge (x \notin B \wedge x \notin C)$ ($T \wedge T \equiv T$)
$\iff x \in A \wedge (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C$ (קיבוציות)
$\iff (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C)$ (חילופיות וקיבוציות)
$\iff (x \in A \setminus B) \wedge (x \in A \setminus C)$ (הגדרת הפרש)
$x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (הגדרת חיתוך)

3. תהי A קבוצה לא ריקה ויהי R יחס עליה. נגדיר יחס S על A כך:
$S = \{(a,b) \in A \times A | \forall c \in A : (a,c) \in R \to (c,b) \in R\}$.
א. הוכיחו: אם R יחס שקילות אז $S = R$.
ב. הוכיחו/הפריכו: אם S יחס שקילות אז $S = R$.
ג. מצאו קבוצה A (לא ריקה) ויחס R עליה עבורם $S = \emptyset$.

פתרון:
א. נוכיח בעזרת הכלה דו־כיוונית.
$\subseteq$: יהי $x = (a,b) \in S$.
אזי לכל $c \in A$, אם $(a,c) \in R$ אז $(c,b) \in R$.
בפרט, עבור $c = a$, $(a,a) \in R$ (כי יח"ש הוא רפלקסיבי) ולכן $(a,b) \in R$.
$\supseteq$: יהי $x = (a,b) \in R$.
על מנת להוכיח כי $(a,b) \in S$ צ"ל כי לכל $c \in A$, אם $(a,c) \in R$ אז $(c,b) \in R$.
יהי $c \in A$ כך ש־ $(a,c) \in R$.
A יח"ש ולכן סימטרי ולכן $(c,a) \in R$.
אזי $(c,a),(a,b) \in R$.
A יח"ש ולכן טרנזיטיבי ולכן $(c,b) \in R$, כדרוש.
אזי $(a,b) \in S$.
ב. הפרכה:
$A = \{1\}, R = \emptyset$.
לכל $a,b \in A$ התנאי $\forall c \in A : (a,c) \in R \to (c,b) \in R$ מתקיים כי לכל $c \in A$ מתקיים $(a,c) \notin \emptyset$ ו־ $T \equiv \emptyset \ni (c,b) \to F$ ולכן $(a,b) \in S$. אזי $S = A \times A \neq R$ יח"ש.
ג. $A = \mathbb{N}, R = \leq_{\mathbb{N}}$.
יהיו $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, נגדיר $c = max\{a,b\} + 1$.
אזי aRc אבל $c \not R b$ ולכן $(a,b) \notin S$. אזי $S = \emptyset$.