תרגיל 4

1. קבעו אילו מהמטריקות הבאות שקולות על $\mathbb{Z}$?

   (א) d_5.

   (ב) d_7.

   (ג) מטריקה $0-1$ כלומר

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

   (ד) והמטריקה המושרית מהמטריקה הסטנדרטית על $\mathbb{R}$ (כלומר $d(x,y) = |x-y|$).

2. נגדיר את S להיות קבוצת הסדרות הממשיות שהטור שלהן מתכנס בהחלט, כלומר

$$S = \{a_n \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\}$$

נגדיר על קבוצה זו שתי מטריקות:

$$d(a_n, b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$$

$$\rho(a_n, b_n) = \sup\{|a_n - b_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$$

האם המטריקות שקולות? הוכיחו.

3. יהי (X,d) מרחב מטרי. נגדיר $\rho : X \to \mathbb{R}$ לפי

$$\rho(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$$

   (א) הוכיחו כי ρ היא מטריקה.

   (ב) הוכיחו כי ρ ו d שקולות.

(ג) הסיקו שכל מטריקה שקולה למטריקה חסומה.

4. יהיו d_1, d_2 מטריקות שקולות על X, ו ρ_1, ρ_2 מטריקות שקולות על Y. נניח ש $f:(X,d_1)\to(Y,\rho_1)$ רציפה. הוכיחו/הפריכו: $f:(X,d_2)\to(Y,\rho_2)$ רציפה.

5. הוכיחו: תהי A קבוצה במרחב מטרי. A סגורה אמ"ם $A' \subseteq A$.

6. תהי S קבוצה במרחב מטרי, ויהי $x \in S$. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:
א. $x \in S \setminus S'$.
ב. קיים $\epsilon > 0$ כך ש $B(x,\epsilon)\cap S = \{x\}$.
ג. לכל סדרה $\{x_n\} \subseteq S$ כך ש $x_n \to x$, מתקיים ש$\{x_n\}$ קבועה לבסוף.

7. תהי $\{x_n\}$ סדרה במרחב מטרי. נסמן $A = \{x_n\}$. ניח ש $x_n \to x$ עבור $x \notin A$.
א. חשבו את A', A''. כאשר $(A'') = (A')'$.
ב. האם A קומפקטי?
ג. האם $A \cup \{x\}$ קומפקטי? (ענו רק באמצעות הגדרת הקומפקטיות, דרך כיסויים פתוחים).

8. יהי X מרחב מטרי ותהי A קבוצה בת מנייה, כך שלכל שתי נקודות שונות בA מתקיים $1 \le d(a,b) \le 2$.
א. הוכיחו שA סגורה וחסומה.
ב. האם A קומפקטית?

9. הוכיחו/הפריכו:
א. $(A_1 \cup ... \cup A'_n) = A'_1 \cup ... \cup A'_n$.
ב. $(\bigcup A_i)' = \bigcup A'_i$.