שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: דר' נוביק
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

תרגיל בית 8 – טופולוגיה

<u>שאלה 1</u>

נתבונן בשלושה תתי מרחבים של $\mathbb{R}^2$:

$$X=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}$$

$$Y=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-2)^2+y^2=1\right\}$$

$$Z=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=1\right\}$$

ראינו בכיתה ש-Z אינו הומיאומורפי ל-X. האם Y הומיאומורפי ל-X או ל-Z?
הוכיחו את תשובתכם!

<u>שאלה 2</u>

תהי X קבוצה לא ריקה עם הטופולוגיה הקו-סופית. האם המרחב $(X,\tau_{cofinite})$ קשיר? (רמז: תלוי בעוצמה של X).

<u>שאלה 3</u>

<u>תזכורת</u> – הישר של סורגנפריי. נסמן ב-$\mathbb{R}_\ell$ את $\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הבאה T:

$O\in T$ אמ"מ O היא איחוד של קטעים מהצורה $[a,b)$ (כולל איחוד ריק).

א. הוכיחו כי מרכיבי הקשירות של $\mathbb{R}_\ell$ הם הנקודונים.

כלומר, הראו שאם A הוא תת מרחב בעל יותר מנקודה אחת, אזי הוא אינו קשיר.

ב. מצאו את כל הפונקציות הרציפות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_\ell$. כלומר, קבעו אילו פונקציות הן רציפות והוכיחו גם שהפונקציות שלא נכנסו לרשימה שלכם – הן אינן רציפות.

<u>שאלה 4</u>

יהי X מ"ט, ותהיינה $A,B\subseteq X$ ת"ק.

א. הוכיחו כי מתקיים $cl(A\cap B)\subseteq cl(A)\cap cl(B)$.

ב. הראו על ידי דוגמה נגדית כי לא ניתן להחליף את ההכלה בסעיף א' בשיוויון.

ג. נסחו והוכיחו טענה דומה (כמו בסעיף א') עבור $int\left(A\cup B\right)$.

שאלה 5

יהיו X,Y מ"ט, ותהי $f:X\to Y$ הומאומורפיזם. הוכיחו כי עבור $A\subseteq X$ מתקיים $f\left(int\left(A\right)\right)=int\left(f\left(A\right)\right)$.

שאלה 6

יהי X מ"ט ותהי $A\subseteq X$. תהי $\chi_A:X\to\{0,1\}$ פונקציה אופיינית המוגדרת ע"י $\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$. יהי $x\in X$.

א) הוכיחו שאם χ_A רציפה ב-x אז $x\notin\partial(A)$.

ב) הוכיחו ש χ_A רציפה אם ורק אם A סגוחה ב- X.

ג) הסיקו שאם X לא קשיר אז קיימת פונקציה רציפה ועל $f:X\to\{0,1\}$.

בהצלחה!