

# מבחן באלגברה לינארית 2 (88-113-01)

מועד א 2020

מרצים: פרופ' בוריס קוניאבסקי וד"ר אליהו מצרי

יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.

יש לנמק היטב כל טענה ומעבר שאתם עושים.

משך הבחינה: שלוש שעות (לאחר הארכה)

חומר עזר מותר: אין.

**שאלה 1:** מצאו את כל הערכים העצמיים של:

$$A = \begin{pmatrix} 10001 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 10003 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 10005 & 7 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 10007 & 9 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 10009 & 11 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 10011 \end{pmatrix}$$

**שאלה 2:**

יהי  $V/\mathbb{C}$  מרחב מכפלה פנימית ויהיו  $a, b \in V$ .

נגדיר אופרטור  $T: V \rightarrow V$  לפי: לכל  $v \in V$ ,  $T(v) = \langle v, a \rangle b$

מצאו נוסחא מפורשת עבור ההעתקה הצמודה  $T^*$ .

**שאלה 3:**

יהי  $V = \mathbb{R}^4$  מרחב מכפלה פנימית מעל  $\mathbb{R}$  עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

תהי  $T: V \rightarrow V$  אופרטור לינארי המוגדר לפי:  $T(v) = Av$  ויהי  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

(א) האם  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  שייך ל- $\text{Im}(T)$ ? אם כן מצא מקור ל- $u$ , אם לא מצא את הוקטור

ב-  $\text{Im}(T)$  הקרוב ביותר ל- $u$ .

(ב) יהי  $R$  מרחב העמודות של  $A^T$ , תת מרחב של  $V$ , מצא בסיס אורתונורמלי ל- $R$  ול- $R^\perp$ .

(ג) יהי  $H = \text{Ker}(T)$ . הוכח כי  $H = R^\perp$ .

#### שאלה 4: הוכח או הפרך

- (א) יהי  $T$  אופרטור צמוד לעצמו אזי  $T+iI$  אופרטור הפיך.  
(ב) אם  $A$  מטריצה הניתנת ללכסון וכל הע"ע שלה הם 1 או -1 אז מתקיים  $A^2 = I_n$   
(ג) אם מטריצה  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  מקיימת:  $A + A^* = I + A^2$  אז  $A$  ניתנת ללכסון אוניטרי.

#### שאלה 5

לכל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה לכל  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , לאף  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  או שלפעמים כן ולפעמים לא (יש לתת דוגמא לכל מקרה), נתון שהע"ע של  $A$  הם 0, 1, -1.

- (א) הפיכה.  $A$   
(ב) אורתוגונלית.  $A$   
(ג)  $A = A^3$ .

**בהצלחה!**