פתרון תרגיל 10

4.1 תרגיל. בדוק אילו מזוגות הוקטורים הבאים מאונכים זה לזה:

א. $(0,1,0,2),(100,0,-999,0)$ במכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^4$.

ב. $(1,i),(1,i)$ במכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{C}^2$.

ג. $(1,i),(1,-i)$ במכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{C}^2$.

א.

$$\langle(0\quad 1\quad 0\quad 2),(100\quad 0\quad -999\quad 0)\rangle = 0+0+0+0=0 \Rightarrow (0\quad 1\quad 0\quad 2)\perp(100\quad 0\quad -999\quad 0)$$

ב.

$$\langle(1\quad i),(1\quad i)\rangle = 1\cdot\bar{1}+i\cdot\bar{i}=1+1=2 \Rightarrow (1\quad i)\not\perp(1\quad i)$$

ג.

$$\langle(1\quad i),(1\quad -i)\rangle = 1\cdot\bar{1}+i\cdot\overline{(-i)}=1-1=0 \Rightarrow (1\quad i)\perp(1\quad -i)$$

4.7 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי ממימד n, ותהא $B\subseteq V$. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. B בסיס אורתונורמלי.

ב.B קב' אורתונ' מגודל n

<u>B בסיס אורתונ'</u> $\Leftrightarrow$ B בסיס וגם קב' אורתונ'

$\Leftrightarrow$ B קב' של n וקטורים בת"ל וגם קב' אורתונ' $\Leftrightarrow$ <u>B קב' של n וקטורים וגם קב' אורתונ'</u>

(כי B אורתונ' אז B בפרט אורתוג' וכפי שנלמד בכיתה זה כבר גורר שהיא קב' בת"ל ולכן התנאי כלול בתוכה ואין צורך לציין אותו שוב)

4.9 תרגיל. הגדר (ישירות) על $V=\mathbb{R}_n[x]$ מכפלה פנימית, כך ש $\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$ יהווה בסיס אורתונורמלי לגבי מכפלה זאת.

$$\left\langle \sum_{i=0}^{n} a_i x^i , \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

$\downarrow$

אם החזקה של אחד מהם נמוכה יותר אז יתר המקדמים עד n הם פשוט 0

נראה שזו מ"פ:

$$1.\left\langle \alpha\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \beta\sum_{i=0}^{n} c_i x^i , \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{n} \alpha a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} \beta c_i x^i , \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right\rangle = \left\langle \sum_{i=0}^{n} (\alpha a_i + \beta c_i) x^i , \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i + \beta c_i) b_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \beta \sum_{i=1}^{n} c_i b_i = \alpha \left\langle \sum_{i=0}^{n} a_i x^i , \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right\rangle + \beta \left\langle \sum_{i=0}^{n} c_i x^i , \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right\rangle$$

$$2.\left\langle \sum_{i=0}^{n} a_i x^i , \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i = \left\langle \sum_{i=0}^{n} b_i x^i , \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right\rangle$$

$$3.\left\langle \sum_{i=0}^{n} a_i x^i , \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq 0. \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i \quad a_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0.$$

כמו כן נראה אורתונורמליות:

$$\forall i \neq j \qquad \left\langle x^i , x^j \right\rangle = 0\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0$$

$$\forall i \qquad \left\langle x^i , x^i \right\rangle = 1\cdot 1 = 1$$

5.4 תרגיל. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות, כאשר U, W תת–מרחבים של מרחב מכפלה פנימית V:

א. $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$.

ב. $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

ג. $(U+W)^{\perp} = (U \cap W)^{\perp}$.

א. הפרכה:

$$(\{0\} + V)^{\perp} = V^{\perp}$$

$$\{0\}^{\perp} + V^{\perp} = V + \{0\} = V$$

ב. הוכחה:

$$\supseteq:\ v\in U^{\perp}\cap W^{\perp}\Rightarrow v\in U^{\perp}\wedge v\in W^{\perp}\Rightarrow\begin{cases}\forall u\in U & \langle v,u\rangle=0\\ \forall w\in W & \langle v,w\rangle=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall u+w\in U+W\qquad \langle v,u+w\rangle=\langle v,u\rangle+\langle v,w\rangle=0\Rightarrow v\in(U+W)^{\perp}$$

$$\subseteq:\ v\in(U+W)^{\perp}\Rightarrow\forall u+w\in U+W\qquad\langle v,u+w\rangle=0$$

בפרט עבור $w=0\in W$:

$$\langle v,u+w\rangle=\langle v,u\rangle=0\Rightarrow\forall u\in U\qquad\langle v,u\rangle=0\Rightarrow v\in U^{\perp}$$

ובפרט עבור $u=0\in U$:

$$\langle v,u+w\rangle=\langle v,w\rangle=0\Rightarrow\forall w\in W\qquad\langle v,w\rangle=0\Rightarrow v\in W^{\perp}$$

$$\Rightarrow v\in U^{\perp}\cap W^{\perp}$$

ג. הפרכה:

$$(\{0\}+V)^{\perp}=V^{\perp}$$
$$(\{0\}\cap V)^{\perp}=\{0\}^{\perp}=V$$

5.7 תרגיל. תהא $S=\{v_1,\ldots,v_k\}$ קבוצה אורתונורמלית ב V. הוכח שלכל $v\in V$ מתקיים: $v-\sum_{i=1}^{k}\langle v,v_i\rangle v_i\in S^{\perp}$.

$$\forall v_j\in S\ \left\langle v-\sum_{i=1}^{k}\langle v,v_i\rangle v_i,v_j\right\rangle=\langle v,v_j\rangle-\sum_{i=1}^{k}\langle v,v_i\rangle\langle v_i,v_j\rangle\underset{\langle v_i,v_j\rangle=\begin{cases}0,i\neq j\\1,i=j\end{cases}}{=}\langle v,v_j\rangle-\langle v,v_i\rangle(0+\ldots+0+\underset{\text{when } i=j}{\overset{}{\underset{\downarrow}{1}}}+0+\ldots+0)=$$

$$\langle v,v_j\rangle-\langle v,v_j\rangle=0\Rightarrow v-\sum_{i=1}^{k}\langle v,v_i\rangle v_i\in S^{\perp}$$

5.8 תרגיל. תהא $S=\{(1,-1,1,-1)\}\subseteq\mathbb{R}^4$ (עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית). מצא בסיס אורתונורמלי ל $S^{\perp}$.

$$S^{\perp}=\left\{\vec{v}=(a,b,c,d)\in R^4:(a,b,c,d)(1,-1,1,-1)=0\right\}=\left\{\vec{v}=(a,b,c,d)\in R^4:a-b+c-d=0\right\}=$$
$$\left\{\vec{v}=(a,b,c,d)\in R^4:a+c=b+d\right\}=\left\{(a,b,c,a+c-b):a,b,c\in R\right\}$$

ברור שמרחב זה הוא ממימד 3 כנדרש, נחפש את הבסיס עבורו מתוך הבסיס הסטנדרטי.
כלומר, נבדוק לאן $(a,b,c,a+c-b)$ שולח כל e_i:

$$e_1\to(1,0,0,1+0-0)=(1,0,0,1)=b_1$$
$$e_2\to(0,1,0,0+0-1)=(0,1,0,-1)=b_2$$
$$e_3\to(0,0,1,0+1-0)=(0,0,1,1)=b_3$$

ואכן

$$\left.\begin{array}{l}\forall(a,b,c,a+c-b)\in S^{\perp}\quad(a,b,c,a+c-b)=a\cdot b_1+b\cdot b_2+c\cdot b_3\Rightarrow span\\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{independent}\end{array}\right\}basis$$
$$\forall i=1,2,3\quad b_i\cdot(1,-1,1,-1)=0\Rightarrow sp\{b_i\}_{b=1}^{3}=S^{\perp}$$

מתהליך גרם שמידט נהפוך את הבסיס לאורתוג':

$$b_1'=b_1=(1,0,0,1)$$
$$b_2'=b_2-\frac{\langle b_2,b_1'\rangle}{\|b_1'\|^2}b_1'=\left(\frac{1}{2},1,0,-\frac{1}{2}\right)$$
$$b_3'=b_3-\frac{\langle b_3,b_1'\rangle}{\|b_1'\|^2}b_1'-\frac{\langle b_3,b_2'\rangle}{\|b_2'\|^2}b_2'=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},1,\frac{1}{3}\right)$$

(בידקו אורתוג' ואל תשכחו לנרמל)