

תרגיל 6 – פתרון

שאלה 1

הוכיחו כי הטור הבא מתכנס ומצאו את סכומו: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)}$

פתרון:

מתקיים: $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{2n+1}{n(n+1)}$ ע"כ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$$

כלומר זהו טור טלסקופי עם סכומים חלקיים:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n+1} = 1 + (-1)^{n-1} \frac{1}{n+1}$$

כלומר $S_n \rightarrow 1$, כלומר הטור מתכנס וסכומו 1.

שאלה 2

יהי $x = 2.309090909\dots$

א. בטאו את x כסכום טור אינסופי.

פתרון:

כלומר: $x = 2.3 + 0.00909090\dots = 2.3 + 0.009 + 0.00009 + 0.0000009 + \dots$

$$x = 2.3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^{2n+1}}$$

ב. מצאו את סכום טור זה.

פתרון:

זהו טור הנדסי:

$$x = 2.3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^{2n+1}} = 2.3 + 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10 \cdot 100^n} = 2.3 + \frac{9}{10} \sum_{n=1}^{\infty} 0.01^n = 2.3 + \frac{9}{10} \left(\frac{1}{1-0.01} - 1 \right)$$

ג. כמסקנה מסעיף ב', מצאו $n, m \in \mathbb{N}$ כך ש- $x = \frac{n}{m}$.

פתרון:

$$2.3 + \frac{9}{10} \left(\frac{1}{1-0.01} - 1 \right) = 2.3 + \frac{9}{10} \left(\frac{100}{99} - 1 \right) = \frac{23}{10} + \frac{10}{11} - \frac{9}{10} = \frac{253+100-99}{110} = \frac{254}{110}$$