שאלות ממספר מבחנים שפורסמו ללא פתרונות

בר אילן קיץ תשס"ח – מצרי וצבאן

שאלה 1

יהי $V=\mathbb{Z}_2{}^3$. נגדיר פונקציה $T:V\to V$ על ידי :

$T(x,y,z)=(x^2+y^2,y^2+z^2,x^2+\mathrm{z}^2)$.

א.להוכיח שההעתקה לינארית.

ב. למצוא בסיס לגרעין ולתמונה ואת מספר האיברים בכל אחת מקבוצות אלו.

ג. נסמן B איחוד הבסיסים מסעיף ב' . יש להוכיח שהוא בסיס לכל המרחב.

ד.חשבו את $[T]_{\mathrm{B}}^{\mathrm{S}}$ כאשר S הבסיס הסטנדרטי .

פיתרון :

א.בדיקה לפי הגדרה / הקריטריון המקוצר , כאשר שימו לב שמעל השדה הנ"ל מתקיים : $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2+b^2$ ...

ב.**גרעין :** $T(x,y,z)=0\ \leftrightarrow x^2+y^2=y^2+z^2=x^2+\mathrm{z}^2=0$

כלומר שלוש משוואות (לא לינאריות !) – מהן נסיק : $x^2=\mathrm{y}^2=\mathrm{z}^2$ והאפשרויות לקיים זאת וכך שסכום שני ריבועים כאלו שווה לאפס הן :

$(x,y,z)=(0,0,0)\ or\ (1,1,1)$ כלומר : $KerT=span\{(1,1,1)\}$, ונמצאים בו שני איברים !.

תמונה : ראינו כי התמונה של העתקה לינארית היא המרחב הנפרש על ידי תמונות בסיס כלשהוא למרחב – ובמקרה זה הבסיס "הסטנדרטי" – ולכן

$$ImT=span\{T(1,0,0),T(0,1,0),T(0,0,1)\}=sp\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$$

ואם נשים שלושה וקטורים כשורות מטריצה נקבל בקלות את המרחב הנפרש על ידם : $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, וקיבלנו כי התמונה היא :

$ImT=span\{(1,0,1),(0,1,1)\}$,כלומר מימדו 2 . ולמציאת מספר האיברים בו , נשים לב שצורת וקטור אופייני בו היא $(a,b,a+b),a,b\in\mathbb{Z}_2$ ואם נעבור על האפשרויות למקדמים נקבל שיש 4 וקטורים בתמונה ! .

ג. כדי להראות שאיחוד הבסיסים לתמונה ולגרעין הינו בסיס למרחב – נשים את שלושת הוקטורים הנ"ל כשורות מטריצה ונראה שצורתה המדורגת היא ללא שורת אפסים – בדיקה פשוטה ! .

ד. נסמן את איחוד בסיס התמונה והגרעין כ: $B = \{(1,1,1),(1,0,1),(0,1,1)\}$

$$[T]_{\mathrm{B}}^{\mathrm{S}} = ([T(1,0,0)]_{\mathrm{B}} \quad [T(0,1,0)]_{\mathrm{B}} \quad [T(0,0,1)]_{\mathrm{B}})$$

$$= ([(1,0,1)]_{\mathrm{B}} \quad [(1,1,0)]_{\mathrm{B}} \quad [(0,1,1)]_{\mathrm{B}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

כאשר את הקואורדינאטות במקרה זה קל לזהות מיידית ללא צורך בפיתרון מערכת משוואות (שזו הדרך בה נשתמש באופן כללי !).

<u>שאלה 3</u>

נגדיר העתקה לינארית $R: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ שמוגדרת :

$R(x,y,z,w) = (x+y+2z, -y-z+w, 2x+2z+2w, y+z-w)$.

נסמן : $V \coloneqq \{T \in Hom(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^4): TR = 0\}$.

א.מצאו את גרעין ותמונת R .

ב.הוכיחו כי V תת מרחב של $Hom(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^4)$.

ג. מהו מימד תת המרחב בסעיף ב' ?

<u>פיתרון</u>

שימו לב כי ניתן להציג את ההעתקה שפועלת על וקטורים במרחב על ידי כפל במטריצה קבועה – כשנחשוב על הצגה ביחס לבסיס הסטנדרטי למרחב:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = [T]_S^S \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} .$$

מכאן שגרעין ההעתקה הוא מרחב האפס של המטריצה ותמונתה היא המרחב הנפרש על ידי עמודותיה .כדי למצוא את שניהם נדרג את המטריצה :

$$\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&-1&-1&1\\2&0&2&2\\0&1&1&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&-1&-1&1\\0&-2&-2&2\\0&1&1&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

מכאן נמצא בנקל כי הגרעין הוא מרחב האפס של המטריצה הנ"ל – כלומר :

$$KerT = sp\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}\}$$

תמונת ההעתקה היא המרחב הנפרש על ידי איברי בסיס – ובעצם מרחב העמודה של המטריצה ! מהצורה המדורגת אנו למדים כי מרחב העמודה נפרש

על ידי עמודות המטריצה המקורית - $[T]_S^S$ שנמצאות במקומות של איברים מובילים במטריצה המדורגת – כלומר העמודה הראשונה והשנייה :

$$ImT = sp\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\}\ .$$

ב. $T,S\in V, a\in\mathbb{R}\Longrightarrow (T+aS)R = TR + aSR = 0+0=0$, כאשר באפס הכוונה להעתקת האפס – והוכחנו מה שצריך בעזרת הקריטריון המקוצר... .

ג. ניתן להסתכל על V כגרעין של ההעתקה הלינארית הבאה :

$L: Hom(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^4)\rightarrow Hom(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^4)$, על ידי $L(T) = TR$ כאשר R היא ההעתקה הנתונה בשאלה.

נמצא את תמונת העתקה זו ומימדה ובעזרת משפט המימדים לה"ל נמצא את מימד הגרעין – נשתמש באיזומורפיזם בין העתקות למטריצות מייצגות ביחס לבסיסים קבועים (!) ונשתמש בבסיס הסטנדרטי . מכאן :

$\dim\left(Hom(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^4)\right) = 4x4 = 16$. כעת נסתכל על תמונת ההעתקה:

$ImL = sp\{L(E_{ij})\} = sp\{E_{ij}R\}$, כאשר E_{ij} מטריצה "סטנדרטית" – עם 1 במקום ה $i\ j$ ושאר איבריה אפסים.

נשים לב כי מבנה המטריצה $E_{ij}R$ הוא כזה ששורתה ה- i הינה השורה ה- j של המטריצה R , ושאר שורותיה אפסים. ראינו כי שורות המטריצה R נפרשות על ידי השורות ה-1 וה- 2 . לכן 8 המטריצות הבאות :

$E_{ij}R : i = 1,2,3,4 ; j = 1,2$ פורשות את מרחב התמונה של ההעתקה (ושוב –לכל אחת ממטריצות אלו , לכל היותר שורה אחת שונה מאפס !).

קל לראות כי מטריצות אלו הן בת"ל – כי אם נניח צירוף לינארי מתאפס שלהן – בהכרח מקדמיו כולם אפסים.

לכן , קיבלנו כי מימד תמונת ההעתקה הוא 8 , וממשפט המימדים להעתקות לינאריות נקבל :

$\dim(KerL) = \dim\left(Hom(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)\right) - \dim(ImL) = 16 - 8 = 8$.

<u>שאלה 4</u>

יהיו V מרחב לינארי ממימד סופי , ו- $T: V \to V$ העתקה לינארית . הוכיחו / הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. $span(KerT \cup ImT) = V$

ב. $span(KerT \cup ImT) = KerT + ImT$

ג. $span(KerT \cup ImT) = KerT \cup ImT$

ד. $span(KerT \cup ImT) = KerT \oplus ImT$

<u>פיתרון</u>

א. <u>לא נכון !</u> "רעיון" אפשרי – ממשפט ההגדרה להעתקות לינאריות , עבור מרחב וקטורי ממימד 2 עם בסיס $\{u, v\}$ קיימת העתקה לינארית יחידה מהמרחב לעצמו כך ש:

$u \longmapsto 0 , v \longmapsto u$. הגרעין והתמונה של ההעתקה יהיו אותו תת מרחב : $span\{u\}$. במקרה זה איחוד הגרעין והתמונה יהיה הגרעין=התמונה, והמרחב שנפרש על ידו לא יהיה שווה לכל המרחב!

דוגמא ספציפית: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ שמוגדרת על ידי הנוסחא –

$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. גרעין ההעתקה הוא $sp\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\}$ וכנ"ל תמונתה ומתקיים: $span(KerT\cup ImT)\neq V$.

ב. נכון: - הוכחנו(זוכרים?...) כי עבור U,W תתי מרחבים של מ"ו V , קיים

$span(U\cup W)=U+W$ ובשאלה מוזכרים שני תתי מרחבים ספציפיים – הגרעין והתמונה.

ג. לא נכון! דוגמא נגדית – שוב , בעזרת משפט ההגדרה לה"ל נבנה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ על ידי $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

כך ש: $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. אז $KerT=span\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\}$,

$ImT=span\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$.וקיים :

$\mathbb{R}^2=KerT+ImT=span(KerT\cup ImT)\neq KerT\cup ImT$, כאשר האיחוד מימין מכיל את וקטור האפס ווקטורים נוספים שרק קואורדינטה אחת שלהם שונה מאפס! (כלומר וקטור כמו $\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ לא שייך לאיחוד מימין , אך שייך לצד שמאל כמובן.

ד. לא נכון! נסתכל על העתקה $T\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, שמקיימת

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\in KerT\cap ImT$ לכן הסכום המופיע בצד ימין בטענה בסעיף ד' (וללא ה"ישר" בסעיף ב') אינו סכום ישר!

<u>מבחן בר אילן - 2000 מועד א'</u>

<u>שאלה 7</u>

יהי F שדה כלשהו ותהי $A\in \mathrm{F}^{n\,x\,n}$. אז :

א. אם המטריצה איננה מטריצת האפס אך מקיימת $rank(A)=rank(A^2)$, אז A הפיכה .

ב. אם קיימת מטריצה $B\in \mathrm{F}^{n\,x\,n}$ כך ש AB הפיכה , אז A הפיכה .

ג. אם לכל $B \in \mathrm{F}^{n\,x\,n}$ שאיננה הפיכה , גם AB איננה הפיכה , אז A איננה הפיכה.

ד.כל התשובות האחרות אינן נכונות .

<u>פיתרון</u>

א.<u>לא נכון</u> : דוגמא ("קיצונית" אף יותר, עבורה $A^2 = A$ למטריצה לא הפיכה) :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, שכמובן איננה הפיכה ...

ב. <u>נכון</u>: אם AB הפיכה אז למשל קיים $0 \neq \det(AB) = \det(A)\det(B)$, לכן $\det(A) \neq 0$, ששקול לכך שהמטריצה הפיכה.

ג.<u>לא נכון:</u> למשל עם דוגמא טריוויאלית $A = I$, ואז $AB = B$ שאיננה הפיכה לכל B לא הפיכה...

ד. ...

<u>שאלה 5 :</u>

נתונה המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 1 & z & 1 \\ i & -1 & z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3x3}$. אזי:

א.לכל $z \in \mathbb{C}$ דרגת המטריצה היא 3 .

ב.קיים $z \in \mathbb{C}$ עבורו דרגת המטריצה היא 2.

ג.לכל $z \in \mathbb{C}$ המטריצה איננה הפיכה.

ד.קיים $z \in \mathbb{C}$ עבורו דרגת המטריצה היא 1.

<u>פיתרון:</u>

ראשית נפעיל פעולות שורה אלמנטריות עד שנגיע לשלב בו נצטרך "להתייחס" לפרמטר z :

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 1 & z & 1 \\ i & -1 & z \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{R}_3 \to -i\mathrm{R}_3]{\mathrm{R}_2 \to \mathrm{R}_2 - \mathrm{R}_1} \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & z-i & 0 \\ 1 & i & -iz \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & z-i & 0 \\ 0 & 0 & -iz-1 \end{pmatrix}$$

עבור $z=i$ נקבל את המטריצה הבאה : $\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ שדרגתה 1 , ונשים לב כי האיבר $A_{3,3}$ שווה לאפס אם ורק אם $z=i$.קיבלנו לכן כי:

סעיף א' – לא נכון !

סעיף ב' - לא נכון !

סעיף ג' – לא נכון !

סעיף ד – נכון !.

מבחן בר אילן 1999 מועד א'

שאלה 3

מספר הפתרונות בשדה $\mathbb{Z}_7$ של המשוואה $x^{-1}+x+\overline{6}=\overline{0}$ הוא :

א. 0

ב. 1

ג. 2 .

ד.אחר.

פיתרון

נזכיר רק כי הכוונה ב"חזקת 1- " להופכי – למשל: $3^{-1}=5\ (mod\ 7)$.

ניתן כמובן לעבור על כל איברי השדה ולבדוק האם פותרים .וניתן גם למשל לעבור למשוואה ריבועית – נשים לב כי איבר האפס אינו פיתרון ולכן נוכל לכפול משוואה זו במשתנה x משני צידיה כשנזכור שאפס אינו יכול להיות פיתרון .
בהנחה זו לשתי המשוואות אותה קבוצת פיתרון , ולכן (כל הפעולות מודולו 7)
$x^{-1}+x+\overline{6}=\overline{0} \underset{\cdot x}{\Rightarrow} 1+x^2+6\,x=0 \iff x^2+6x+8=0$.

וקיבלנו משוואה שקולה : $x^2+6x+8=0 \Longleftarrow$

$x^2+2x+4x+8=x(x+2)+4(x+2)=(x+2)(x+4)=$
$(x-5)(x-3)=0$ ומכאן שני פתרונות : $\boldsymbol{x=3\ or\ 5}$.

לכן סעיף ג' בלבד נכון.

שאלה 4

המספר $z=(2+i)^{10}-(2-i)^{10}$ הוא:

א.ממשי חיובי **ב.**ממשי שלילי **ג.**מדומה טהור **ד.**אף אחת מהאחרות לא נכונה.

פיתרון:

ניזכר כי $2+i=\sqrt{5}cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $2-i=\sqrt{5}cis(\frac{-\pi}{6})$ בהצגות פולריות.

לכן מנוסחת דה-מואבר:

$$z=(2+i)^{10}-(2-i)^{10}=(\sqrt{5}cis\left(\frac{\pi}{6}\right))^{10}-(\sqrt{5}cis\left(\frac{-\pi}{6}\right))^{10}=$$

$$5^5 cis\frac{10\pi}{6}-5^5 cis\frac{-10\pi}{6}=5^5\left(\underbrace{cos\frac{10\pi}{6}-cos\frac{-10\pi}{6}}_{=0}\right)+i5^5(\underbrace{sin\frac{10\pi}{6}-sin\frac{-10\pi}{6}}_{=2sin\frac{10\pi}{6}})$$

וקיבלנו מספר מדומה טהור ! לכן סעיף ג' נכון.

<u>שאלה 12</u>

תהיינה $A,B\in \mathrm{F}^{n\,x\,n}$. אזי:

א. $rank(AB)=rank(BA)$

ב. $rank(A+B)\le rank(A)$

ג. $rank(AB)\le rank(A+B)$

ד. אף אחת מהאחרות איננה בהכרח נכונה.

<u>פיתרון</u>

א.<u>לא נכון!</u> למשל: $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ ומתקיים:

$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, שדרגותיהן שונות!

ב. <u>לא נכון!</u> למשל A מטריצת האפס , ו- B הפיכה כלשהיא.

ג. <u>לא נכון!</u> למשל $A=I\,,B=-I$ אז :

$n=rank(AB)=rank(-I)>rank(A+B)=rank(0)=0$.

ד. <u>נכון !</u>

מקבץ שאלות ממבחנים – טכניון/תל אביב:

שאלה:

נתון כי $T: V \to V$ העתקה לינארית כך ש: $\dim(KerT) = \frac{1}{3} dimV$. יש להוכיח קיום בסיס B למרחב כך שבמטריצה $[T]_B^B$ שליש מהשורות הן שורות אפסים.

פיתרון:

לפי משפט המימדים נקבל כי $\dim(ImT) = \frac{2}{3} dimV$. נסמן $dimV = 3k$, זאת כי מימד המרחב כולו חייב להיות כפולה של 3).ניקח בסיס ל ImT :

$\{v_1, \dots, v_{2k}\}$ ונשלימו לבסיס של V לבסיס:

$B = \{v_1, \dots, v_{2k}, v_{2k+1}, \dots, v_{3k}\}$. נסתכל על $[T]_B^B$: נשים לב כי מכיוון ש-

$T(v_i) \in ImT$, כל איבר $T(v_i)$ ניתן להצגה כצירוף לינארי של $\{v_1, \dots, v_{2k}\}$

ולכן עבור $1 \le j \le 3k$ נקבל :

$T(v_j) = a_{j1}v_1 + \dots + a_{j,2k}v_{2k} + 0v_{2k+1} + 0v_{3k}$. לכן במטריצה המייצגת שליש מהשורות (השלישי התחתון) הן שורות אפסים.

שאלה:

להוכיח/להפריך: יהי מרחב וקטורי V .אז לכל תת מרחב שלו U כך ש:

$dimU < dimV$, קיימת העתקה לינארית T כך שלכל $u \in U$ קיים $Tu = u$

אך $T \neq I$.

פיתרון :

הטענה נכונה! נבחר בסיס לתת המרחב U : $\{u_1, \dots, u_k\}$, ונשלימו לבסיס למרחב כולו: $\{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$. נגדיר העתקה לינארית $T: V \to V$

כך ש: $T(u_i) = u_i \implies 1 \le i \le k$, $T(u_i) = 0 \implies k+1 \le i \le n$ - זה לפי משפט ההגדרה שמבטיח קיום ויחידות העתקה כזו!.

כעת , לכל $u \in U$ קיימת הצגה כצירוף לינארי של איברי הבסיס:

$u = \sum_{i=1}^{k} a_i u_i$, ומכאן: $T(u) = T(\sum_{i=1}^{k} a_i u_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i T(u_i) = u$

בנוסף קיים $T(v_j) = 0 \neq v_j$ עבור האיברים איתם השלמנו לבסיס .לכן $T \neq I$.

שאלה 1 ב' (תל אביב סמסטר א' תשס"ב, מועד א')

יהיו L_1, L_2 תתי מרחבים של מרחב לינארי ממימד סופי.הוכיחו כי אם מתקיים:

$\dim(L_1 + L_2) = 1 + \dim(L_1 \cap L_2)$ אז הסכום $L_1 + L_2$ שווה לאחד מתתי המרחבים האלה, והחיתוך $L_1 \cap L_2$ שווה לשני .

פיתרון

ידוע כי $\dim(A \cap B) \leq \dim(A) \leq \dim(A + B)$ לכל תתי מרחבים A, B של מרחב לינארי ממימד סופי .

אצלנו נקבל:

$$\overbrace{\dim(L_1 \cap L_2)}^{Left} \underbrace{\leq}_{1} \dim(L_k) \underbrace{\leq}_{2} \dim(L_1 + L_2) = \overbrace{1 + \dim(L_1 \cap L_2)}^{Right},$$

עבור $k = 1,2$. נשים לב כי ההפרש בין *Right* ל- *Left* הוא 1 , ולכן בשני אי השוויונים 1 ו-2 , לא ייתכן ששניהם שוויון ולא ייתכן ששניהם אי שוויונים חזקים. לכן אחד מהם שוויון והשני אי שוויון חזק.

*נסתכל למשל על $k = 1$ ונניח שוויון ב"1" ואי שוויון חזק ב"2". אז

$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim(L_1) < \dim(L_1 + L_2)$. מהשוויון משמאל ומכך ש:

$L_1 \cap L_2 \subseteq L_1$ ובעלי אותו מימד , נקבל כי $L_1 \cap L_2 = L_1$. מכאן , משיקולי קבוצות נקבל כי $L_1 \subseteq L_2$. מזה נסיק כי $L_1 + L_2 = L_2$ וקיבלנו מה שצריך!

*אם מתקיים $\dim(L_1 \cap L_2) < \dim(L_1) = \dim(L_1 + L_2)$, אז מהשוויון מימין נסיק כי $L_1 = L_1 + L_2$ (שוב – מכיוון שיש הכלה ושוויון במימדים...) .

מכך נסיק כי $L_2 \subseteq L_1$ ומכאן משיקולי חיתוך קבוצות נקבל :

$L_2 = L_1 \cap L_2$, כנדרש! .

האוניברסיטה העברית , תשס"ח 8.2.08 מועד א'

שאלה 4:

תהי מערכת לא הומוגנית $Ax = b$ בשלושה נעלמים.

א.הוכיחו כי הפרש שני פתרונות למערכת הנ"ל הוא פיתרון למערכת ההומוגנית הנגזרת ממנה.

ב. אם $\overbrace{(1,-2,1)}^{w}$, $\overbrace{(1,-2,-1)}^{v}$, $\overbrace{(1,-4,0)}^{u}$ פתרונות למערכת הלא הומוגנית הנ"ל , הוכיחו כי $(1,0,0)$ איננו פיתרון למערכת ההומוגנית הנגזרת ממנה.

<u>פיתרון:</u>

א.תוצאה ידועה – פשוט נציב.

ב. נשים לב כי קיים: $v+w-u=(1,0,0)$. לכן קיים:

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=A(v+w-u)=Av+Aw-Au=b+b-b=b$$

<u>טכניון חורף תשסח מועד א'</u>

העתקה לינארית נתונה $T:\mathbb{R}^{2\ X\ 2}\to\mathbb{R}_3[x]$ מוגדרת על ידי:

$$T\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right)=(a-b+c)+(b+c-d)x+(a+2c-d)x^2+(a-2b+d)x^3$$

ויהא U תת מרחב של כל המטריצות הסימטריות.

א.מצאו בסיס ומימד לגרעין ההעתקה.

ב.מצאו בסיס ומימד לתמונת ההעתקה.

מצאו את $\dim(U\cap KerT)$ ואת $\dim(U+KerT)$

<u>פיתרון :</u>

א. $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in KerT$ אם ורק אם מתקיימות המשוואות :

$$a-b+c=b+c-d=a+2c-d=a-2b+d=0$$

כלומר יש לפתור מערכת הומוגנית עם מטריצת מקדמים :

$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ עם פיתרון : $(t-2s,t-s,s,t);t,s\in\mathbb{R}$.

לכן בסיס לגרעין יהיה למשל: $\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$ ומימדו 2.

ב. נשים לב כי התמונה נפרשת על ידי תמונות של איברי בסיס כלשהוא. ואם נסתכל על תמונות הבסיס הסטנדרטי של מרחב המטריצות הנ"ל נקבל :

$$1+x^2+x^3, -1+x-2x^4, 1+x+2x^2\ , -x-x^2+x^3 \quad .$$

כעת נשים לב כי על סמך משפט המימדים להעתקות נסיק כי מימד התמונה צריך להיות $4-2=2$ אחרי שמצאנו את מימד הגרעין. בנוסף נשים לב כי שתי תמונות איברי הבסיס השמאליות אינן כפולה אחת של השניה ולכן מהוות בסיס לתמונה ! כלומר $ImT = span\{1+x^2+x^3, -1+x-2x^4\}$.

ג. נשים לב שבסיס למרחב המטריצות הסימטריות בגודל 2x2 יכול להיות הקבוצה : $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ ומימדו 3.

מהסתכלות על בסיס הגרעין שמצאנו רואים כי הוא אינו מוכל ב- U .

לכן:$\dim(KerT\cap U) < \dim(KerT) = 2$. לא ייתכן שמימד החיתוך הוא אפס , כי מנוסחת המימדים נקבל:

$\dim(U+KerT) = dimU + \dim(KerT) - \dim(KerT\cap U) = 3+2=5$, אך זה לא ייתכן מכיוון ש $U+KerT \subseteq \mathbb{R}^{2X2}$, שמימדו 4 ! .לכן , $\dim(KerT\cap U)=1$.

מכאן נסיק כי $\dim(U+KerT) = 3+2-\dim(KerT\cap U) = 3+2-1 = 4$.

*פתרון אחר היה מציאת בסיס לחיתוך $KerT\cap U$ ומכאן מימדו ומימד הסכום .