משטחים

תכונות פנימיות

תכונות שנשמרות תחת איזומטריה מקומית.
תכונות שמחושבות מתוך g_{ij}

לדוגמה:
- אורך של עקומות
- עמסלול הקצר ביותר בין 2 נקודות A וB
- זווית בין עקומות
- שטח

תכונות חיצוניות

תכונות שלא נשמרות תחת איזומטריה מקומית.

לדוגמה:
- עקמומיות של עקומות על המשטח
- קצב השינוי של נורמל למשטח

ווקטורים פורשים

משטח S נתון ע"י פרמטריזציה $X(u_1, u_2)$.
X_1 וX_2 פורשים את המרחב המשיק T_p(לא בטוח ש$X_1 \perp X_2$)

הגדרה

ווקטור נורמל

$$n = \frac{X_1 \times X_2}{|X_1 \times X_2|}$$

(ואז $n \perp X_1$ ו$n \perp X_2$)
$\{X_1, X_2, n\}$ יוצרים בסיס ל$\mathbb{R}^3$.

נסמן

ווקטורי נגזרת שנייה

$$X_{11} = \frac{\partial^2 X}{(\partial u_1)^2} \qquad X_{12} = X_{21} = \frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2} \qquad X_{22} = \frac{\partial^2 X}{(\partial u_2)^2}$$

אפשר להציג אותם כקומבינציה לינארית של $\{X_1, X_2, n\}$:

$$\begin{aligned} X_{11} &= \Gamma_{11}^1 X_1 + \Gamma_{11}^2 X_2 + L_{11} n \\ X_{21} = X_{12} &= \Gamma_{12}^1 X_1 + \Gamma_{12}^2 X_2 + L_{12} n \\ X_{22} &= \Gamma_{22}^1 X_1 + \Gamma_{22}^2 X_2 + L_{22} n \end{aligned}$$

- Γ נקראים מקדמי כריסטופל, והם תכונה פנימית של המשטח.
כלומר אם נחשב את מקדמי כריסטופל עבור משטחים איזוטריים מקומיים, זה יצא אותו דבר - ניתן לחשב אותם מתוך g_{ij}.
- L נקראים תבנית יסודית שנייה: $\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$, ויש להם חשיבות - אבל היום נתמקד במקדמי כריסטופל.
תמיד ניתן לחשב את התבנית היסודית השנייה, והוא מספר על התכונות החיצוניות של המשטח.

משפט

ניתן לחשב את Γ_{ij}^{k} מתוך g_{ij}:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\left(g_{il:j} - g_{ij:l} + g_{jl:i}\right) g^{lk} \qquad l = 1, 2$$

משמעות הסימון

- יש סכימה על l(כי הוא נמצא גם למעלה וגם למטה)
- $g_{ij} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$.
- $(g_{ij})^{-1} = (F_1)^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} = g^{ij}$ - כלומר המטריצה ההופכית לתבנית היסודית הראשונה.
- $g_{ij:k} = \dfrac{\partial\left(g_{ij}\right)}{\partial u_k}$

כלומר הנוסחה היא בעצם:

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial u_i}\right) \cdot \left(F_1^{-1}\right)_{lk}$$

איך פותרים תרגיל ע"י הנוסחה?

1. מחשבים g_{ij}
2. מחשבים את המטריצה ההופכית g^{ij}
3. מחשבים את הנגזרות $g_{ij:k}$

תרגיל(ממבחן)

נתונה הפונקציה $f(x,y)=\frac{9}{y}$ ומטריקה המוגדרת ע"י $(f(x,y))^2\left(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2\right)$. חשב את סימני כריסטופל.

הערה

לא תמיד נתון המשטח עצמו - לפעמים נתונות רק התכונות הפנימיות של המשטח(למשל נתונה מטריקה)

פתרון

התבנית היסודית ה-I המתאימה היא $\begin{pmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{81}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{81}{y^2} \end{pmatrix}$. המטריצה ההופכית היא

$$\begin{pmatrix} \frac{y^2}{81} & 0 \\ 0 & \frac{y^2}{81} \end{pmatrix}$$

$$g^{11}=\frac{y^2}{81} \qquad g^{12}=g^{21}=0 \qquad g^{22}=\frac{y^2}{81}$$

$$\begin{aligned} g_{11:1} &= 0 \\ g_{12:1}=g_{21:1} &= 0 \\ g_{22:1} &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g_{11:2} &= -\frac{162}{y^3} \\ g_{12:2}=g_{21:2} &= 0 \\ g_{22:2} &= -\frac{162}{y^3} \end{aligned}$$

<u>**חשוב!!!**</u> יש 6 סימני כריסטופל - חשוב לחשב את כולם!

כדי לחשב את הנוסחה, נתרגם אותה לשפת בני אדם:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}\overbrace{(\quad)}^{l=1}g^{11}+\frac{1}{2}\overbrace{(\quad)}^{l=2}\underbrace{g^{21}}_{=0}=\frac{1}{2}\left(\underbrace{g_{11:1}}_{=0}-\cancel{g_{11:1}}+\cancel{g_{11:1}}\right)g^{11}=0 \\
\Gamma_{11}^2 &= \ldots \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2}\overbrace{(\quad)}^{l=1}g^{11}+\frac{1}{2}\overbrace{(\quad)}^{l=2}g^{21}=\frac{1}{2}\left(g_{11:2}-\underbrace{g_{12:1}}_{=0}+\underbrace{g_{21:1}}_{=0}\right)g^{11}=\frac{1}{\cancel{2}}\left(-\frac{\cancel{162}}{y^3}\right)\frac{y^2}{\cancel{81}}=-\frac{1}{y} \\
\Gamma_{12}^2 &= \ldots \\
\Gamma_{22}^1 &= \ldots \\
\Gamma_{22}^2 &= \ldots
\end{aligned}$$

וכמובן, צריך לחשב את שאר מקדמי כריסטופל

משמעות

צעד קטן במשטח כאשר y קרוב לאפס הוא צעד גדול ב$\mathbb{R}^3$. צעד גדול במשטח כאשר y רחוק מאפס הוא צעד קטן ב$\mathbb{R}^3$. ציר הx לא משפיע על המטריקה.

תרגיל

הוכחה של הנוסחה

פתרון

1. **הגדרה:** $X_{ij} = \Gamma_{ij}^k X_k + L_{ij} \cdot n$

ננסה למצוא את המקדמים ע"י הטלות:

$$\langle X_{ij}, n\rangle = \left\langle \Gamma_{ij}^k X_k + L_{ij} n, n\right\rangle = \Gamma_{ij}^k \underbrace{\langle X_k, n\rangle}_{=0} + L_{ij} \underbrace{\langle n, n\rangle}_{=1} = L_{ij} \Rightarrow \langle X_{ij}, n\rangle = L_{ij}$$

$$\langle X_{ij}, X_k\rangle = \left\langle \Gamma_{ij}^m X_m + L_{ij} n, X_k\right\rangle = \Gamma_{ij}^m \underbrace{\langle X_m, X_k\rangle}_{g_{mk}} + L_{ij} \underbrace{\langle n, X_k\rangle}_{=0} = \Gamma_{ij}^m g_{mk}$$

2. **טענה:** $\langle X_{ij}, X_k\rangle = \Gamma_{ij}^m = g_{mk}$

$$g_{ij:k} = \frac{\partial}{\partial u_k}\left(\langle X_i, X_j\rangle\right) = \langle X_{ik}, X_j\rangle + \langle X_i, X_{jk}\rangle \overset{(2)}{=} \Gamma_{ik}^m g_{mj} + \Gamma_{jk}^m g_{mi}$$

3. **טענה:** $g_{ij:k} = \Gamma_{ik}^m g_{mj} + \Gamma_{jk}^m g_{mi}$

נסמן $b_{\{i,j\}} = \frac{1}{2}(b_{ij} + b_{ji})$ ואז

$$g_{ij:k} = g_{mj}\Gamma_{ik}^m + g_{mi}\Gamma_{jk}^m = 2 \cdot g_{m\{j}\Gamma^m{}_{i\}k}$$

מציבים

$$\frac{1}{2}\left(g_{il:j} - g_{ij:l} + g_{jl:i}\right) = \Gamma_{ij}^m g_{ml}$$

כדי לבודד את Γ, צריך להכפיל בהופכי של (g_{ml}):

$$\frac{1}{2}\left(g_{il:j}-g_{ij:l}+g_{jl:i}\right)g^{lk}=\Gamma_{ij}^{m}g_{ml}g^{lk}=\Gamma_{ij}^{m}\delta_{m}^{k}=\Gamma_{ij}^{k}$$