תרגיל 1: תהי $S=\{v_1,...,v_n\}$ קבוצה אורתוגונלית כך ש $0\notin S$. הוכיחו כי S בת"ל.

פתרון:

נניח בשלילה ש S לא בת"ל.

בה"כ קיימים $\alpha_i \in F$, $1\le i\le n-1$ כאשר לפחות אחד שונה מ0 (נניח שזה α_j) כך ש
$v_n=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i v_i$.

כעת, מכיוון שהמ"פ היא ליניארית באיבר הראשון, ומכיוון ש $\langle v_i,v_j\rangle=0$ לכל $i\neq j$ (כי הקבוצה אורתוגונלית), נקבל:

$$\langle v_n,v_j\rangle=\left\langle \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i v_i,v_j\right\rangle=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\langle v_i,v_j\rangle=\alpha_j\langle v_j,v_j\rangle=\alpha_j\|v_j\|$$

נשאר רק להסיק ש $0=\frac{\langle v_n,v_j\rangle}{\alpha_j}=\|v_j\|$, לכן $v_j=0$, וזו סתירה.

תרגיל 2:

אם $B=\{w_1,...,w_n\}$ הוא בסיס אורתונורמלי של ממ"פ V , אז לכל $v\in V$,

$$[v]_B=\begin{pmatrix}\langle v,w_1\rangle\\ \langle v,w_2\rangle\\ \vdots\\ \langle v,w_n\rangle\end{pmatrix}$$

הוכחה: נסמן $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=[v]_B$, אז לפי הגדרת וקטור הקואורדינטות, $v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i w_i$.

כעת, מכיוון ש B אורתונורמלית, לכל j

$$\langle v,w_j\rangle=\left\langle \sum_{i=1}^{n}\alpha_i w_i,w_j\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\langle w_i,w_j\rangle=\alpha_j\langle w_j,w_j\rangle=\alpha_j\|w_j\|^2=\alpha_j$$

קיבלנו $\langle v,w_j\rangle=\alpha_j$.