מבוא <u>הרצאה 3</u>

משוואות Euler-Lagrange

$$\forall q_i \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$$L = T - V$$

<u>דוגמה א':</u> כתבו את משוואות E-L עבור מסה המתוארת בקואורדינטות פולריות כש כח כלשהו פועל עליה (כלומר הפוטנציאל הוא V)

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

$$V = V(r,\theta)$$

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \qquad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$T = \frac{1}{2}m\left((\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right) - V(r,\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

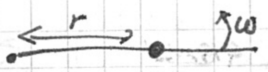
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r} \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{\theta}\dot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$\mathrm{I})\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \qquad \mathrm{II})\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = -\frac{\partial V}{\partial r} \qquad mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{\theta}\dot{r} = -\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

<u>דוגמה ב':</u>



$$x = r\cos\omega t \qquad y = r\sin\omega t$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2)$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2)$$

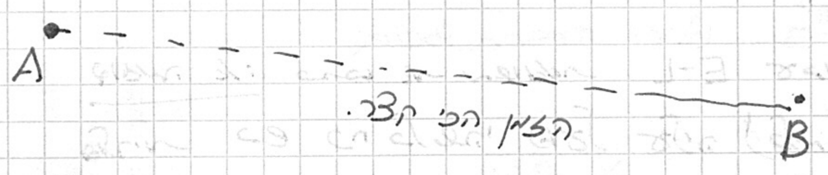
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\omega^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{r} = r\omega^2}$$

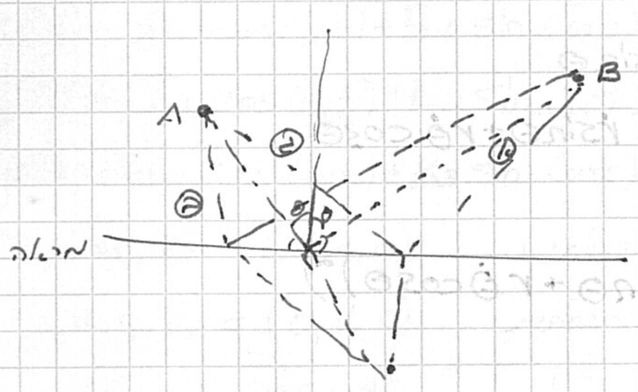
ניוטון $\Leftarrow$ Euler-Lagrange

מאיפה הגיע ה - Lagrangeian? ~~מהעקב~~
מה העקרון הפיזיקלי שמאחוריו?

עבור אופטיקה <u>עקרון Fermat</u>

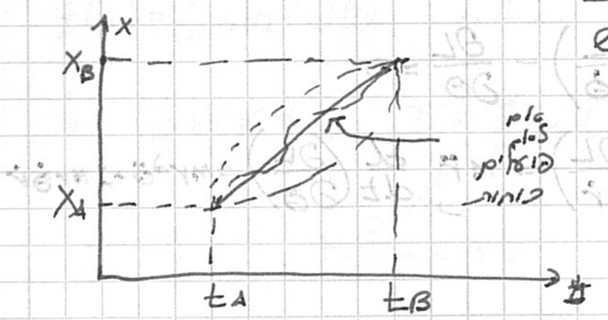


העקרון שואף להגיע מ A ל- B בזמן הכי קצר.



מכל המסלולים הוא בוחר את הזמן הכי קצר
המסלול ① הוא המסלול המינימלי.

<u>עקרון Hamilton:</u>
אפשר למצוא מסלול (אחד ויחיד) כך ש
האינטגרל על המסלול



עבור מסלול אמיתי $x_{true}(t)=v(t-t_A)+x_A$

$$v=\frac{x_B-x_A}{t_B-t_A}$$

~~נמצא~~ וניקח מסלול כלשהו ונמצא
כדי שיהיה תמיד חיובי.

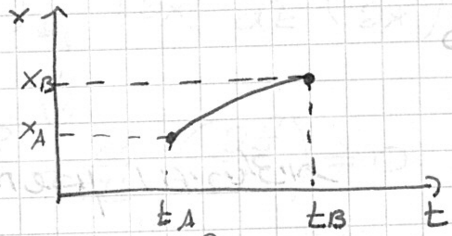
$$\int_{t_A}^{t_B}\left(v-\frac{dx}{dt}\right)^2 dt=\int_{t_A}^{t_B} v^2-2v\frac{dx}{dt}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt$$

$$=\underbrace{v^2(t_B-t_A)}_{\text{קבוע}}\ \underbrace{-2v\left[x(t_B)-x(t_A)\right]}_{\text{קבוע}}+\int_{t_A}^{t_B}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt$$

$$\int_{t_A}^{t_B}\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt \leftarrow$$
מינימום של אינטגרל
זה נותן מסלול אמיתי.

$$=\int_{t_A}^{t_B} T\,dt \underset{L=T-V}{=} \int_{t_A}^{t_B} L\,dt$$

מה קורה כשיש כוח ? $F(x)=-\frac{dV}{dx}$



נראה עבור מקרה של כוח קבוע.

$$F(x)=k$$

$$I:=\int_{t_A}^{t_B}\left(V-\frac{dx}{dt}\right)^2 dt$$

$$V=V_0+\frac{k}{m}t$$

$$\int_{t_A}^{t_B}\left(V_0+\frac{k}{m}t-\frac{dx}{dt}\right)^2 dt=\overbrace{V_0^2(t_B-t_A)}^{\text{קבוע}}+\overbrace{\frac{V_0k}{m}(t_B^2-t_A^2)}^{\text{קבוע}}+\overbrace{\frac{1}{3}\frac{k^2}{m^2}(t_B^3-t_A^3)}^{\text{קבוע}}$$

$$+\int_{t_A}^{t_B}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\overbrace{2V_0\left[x(t_B)-x(t_A)\right]}^{\text{קבוע}}-2\frac{k}{m}\int_{t_A}^{t_B}t\,\frac{dx}{dt}\,dt$$

קבוע כלומר קבוע לכל מסלול שנבחר.

$$\int_{t_A}^{t_B}t\,\frac{dx}{dt}\,dt=t\,x(t)\Big|_{t_A}^{t_B}-\int_{t_A}^{t_B}x\,dt$$

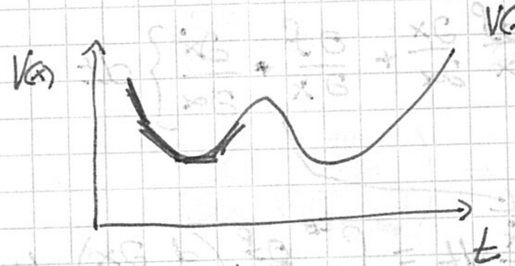
$$I=\text{const}+\int_{t_A}^{t_B}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{2k}{m}x\,dt$$

$$I=\text{const}+\int_{t_A}^{t_B}\underbrace{\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}_{T}+\underbrace{kx}_{-V}dt$$

$$I=\text{const}+\int_{t_A}^{t_B}L\,dt$$

נניח כח לא קבוע כלומר יש $V(x)$

נעשה בכל קטע קטן קו ישר



$$\sum_i\int_{t_i}^{t_{i+1}}L\,dt\Rightarrow\int_{t_A}^{t_B}L\,dt$$

לפי המילטון הטבע בודקת את כל המסלולים ומוצא את המסלול בעזרת

כדי למצוא את המסלול המינימלי.

$\int_{t_A}^{t_B}L\,dt\longrightarrow$ Euler – Lagrange   שיעור הבא

וכדי לפתור את זה נלמד חשבון וריאציות