תרגיל מספר0 מבנים אלגבריים

25 באוקטובר 2015

קבע לכל אחת מהקבוצות והפעולות הבאות קבע האם היא אגודה/מונאיד/חבורה. במידה שקיימת יחידה שמאלית/ימנית/דו"צ מצא אותה. במידה שמדובר בחבורה מצא את ההופכי של איבר נתון.

1. קבוצת שורשי היחידה מסדר n, כלומר הקבוצה $X = \{a \in \mathbb{C} \,|\, a^n = 1\}$ עם הפעולה של כפל רגיל של מספרים מרוכבים.
   פתרון : חבורה עם היחידה 1 של המספרים המרוכבים. סגירות: עבור $a, b \in X$ מתקיים כי $a^n = b^n = 1$ ולכן $(ab)^n = a^n b^n = 1 \cdot 1 = 1$ ולכן $ab \in X$. בנוסף אם $a \in X$ אזי $a \neq 0$ (כי $0^n \neq 1$) ולכן קיים לו הופכי $a^{-1} \in \mathbb{C}$ נראה כי $a^{-1} \in X$ שזה מוכיח שלכל איבר ב X יש הופכי ולכן X חבורה. אכן, $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} = 1^{-1} = 1$.

2. קבוצת המטריצות הריבועיות מסדר $n > 1$, כלומר $\mathbb{F}^{n \times n}$ עם פעולת כפל מטריצות
   פתרון : מונואיד, עם מטריצת היחידה כאיבר היחידה. לא חבורה כי למטריצות לא הפיכות אין הופכי.

3. יהא $\mathbb{F}$ שדה. אזי הקבוצה $G = \mathbb{F}^* = \mathbb{F} \backslash \{0\}$ עם הכפל של השדה.
   פתרון : זוהי חבורה. יש סגירות כי כפל של 2 איברים שונים מאפס תמיד שונה מאפס. היחידה היא $1_{\mathbb{F}}$ של השדה. עבור $x \in G$ קיים לו הופכי לפי הגדרת השדה (x שונה מאפס)

4. המטריצות $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,|\, 0 < a \in \mathbb{R}, \, b \in \mathbb{R} \right\}$ עם כפל מטריצות רגיל.
   פתרון : זוהי חבורה. היחידה היא מטריצת היחידה $I_2 \in G$. עבור מטריצה $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in G$ ההופכית שלה (היא קיימת כי הדט' שונה מאפס..) היא $\frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

5. השלמים $G = \mathbb{N}$ עם פעולה $a * b = a^b$
   פתרון : זה לא אגודה כי $2 = 2 * 1 = 2 * (1 * 2) \neq (2 * 1) * 2 = 2 * 2 = 4$

6. תת קבוצה של הפולינומים $X = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|p(1) = 0\}$ עם חיבור פולינום רגיל.
   פתרון : זה חבורה. כי מרחב וקטורי (או למתעקשים ת"מ)

7. הטבעיים $G = \mathbb{N}$ עם פעולה מקסימום $a * b = \max\{a, b\}$
   פתרון : זה מונואיד. איבר היחידה הוא 1

8. קטעים פתוחים בקבוצת הממשיים

$$G = \left\{ \, (a, b) \subseteq \mathbb{R} \,|\, a < b, \, a.b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \, \right\} \cup \{\emptyset\}$$

עם פעולת חיתוך קבוצות.
פתרון : זה מונואיד. איבר היחידה הוא $\mathbb{R}$

9. תת קבוצה של המטריצות $G = \{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ עם כפל מטריצות רגיל.

פתרון : זה אגודה. היחידות ימניות הן מהצורה $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. אין יחידות שמאליות.

10. תת קבוצה של מטריצות משולשיות $G = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ עם כפל מטריצות רגיל.

פתרון : זה אגודה. צורה סכמטית של כפל היא

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן אין יחידה.