

מתמטיקה בדידה – תרגיל 11

1. הוכיחו כי:

א. $|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$

ב. $|\mathbb{N}^{2012} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}^{2012}|$

ג. $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| > |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|$

ד. $|\{0,1\}^{\mathbb{R}}| = |[0,1]^{\mathbb{R}}|$

ה. $|P(\mathbb{R})| = |P(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})|$

ו. $|P(\mathbb{R})| = |P(\mathbb{R}) \setminus P(\mathbb{Q})|$

2. הוכיחו שקיימות $B, C \subseteq A$ כך ש $B \cap C = \emptyset$, $B \cup C = A$ ו- $|B| = |C| = |A|$.

3. תהיו A ו- B קבוצות, B קבוצה אינסופית. נסמן $|A| = a$, $|B| = b$ ונניח ש $1 < a \leq b$. הוכיחו שעוצמת הקבוצה $\bigcup_{x \in A} (B \times \{x\})$ היא b .

4. תהי F קבוצת כל הפונקציות מ- \mathbb{R} ל- \mathbb{R} , ותהי G קבוצת כל הפונקציות מ- F ל- F .

א. מהי העוצמה של G ?

ב. האם העוצמה של G שווה לעוצמת אחת מן הקבוצות הבאות: $P(P(P(Q)))$, $P(P(P(Q)))$ אם כן לאיזו?

ג. מהי עוצמת הקבוצה הבאה: $A = \{A \subseteq \mathbb{R}^3 \mid A \text{ קבוצה בלתי תלויה ליניארית}\}$?

5. מצא קבוצה סדורה חלקית שיש בה איבר מינימאלי יחיד ואין בה איבר קטן ביותר.

6. תהי A קבוצת הקבוצות האינסופיות של מספרים טבעיים כך שגם המשלימים שלהם ביחס ל- \mathbb{N} אינסופיים (למשל מספרים זוגיים ואי-זוגיים). הוכיחו שבקבוצה סדורה חלקית (A, \subset) אין הן איבר מינימאלי הן איבר מקסימאלי.

7. תהי B שרשרת ב- $(A, <)$. הוכיחו ש- B שרשרת מקסימאלית אם"ם אין איבר ב- $A \setminus B$ שניתן להשוואה עם כל איברי B .

8. הוכיחו כי $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ עם הסדר המילוני (יחס זה הוגדר בתרגיל בית 6, תרגיל 5) היא קבוצה סדורה היטב (קבוצה סדורה ליניארית שבכל תת-קבוצה לא ריקה שלה יש איבר קטן ביותר).

9. תהי (X, \leq) קס"ח כך שלכל קבוצה חלקית לא ריקה עם חסם מלעיל יש גם חסם עליון. הוכיחו כי לכל קבוצה חלקית לא ריקה עם חסם מלרע יש גם חסם תחתון.

10. נתונה הקבוצה $A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,6), (2,1), (2,6), (3,1), (3,2), (3,6)\}$. נגדיר יחס \leq_* ע"י:

$$(x, y) \leq_* (z, w) \Leftrightarrow x \mid z \wedge y \leq w$$

א. הראו (A, \leq_*) קס"ח.

ב. מצאו איברים מינימאליים, מקסימאליים, קטן ביותר, גדול ביותר (אם קיימים).

ג. תהי $B = \{(1,2), (1,3), (1,6), (3,2)\} \subset A$ יחד עם היחס \leq_* . קבעו $\sup(B)$, $\inf(B)$.

בהצלחה!