תרגול 13:

תרגיל ממבחן:

קבעו כמה אפסים כולל ריבוי יש לפונקציה $\frac{4z^3-e^z}{z+2}\sin z$ בתוך עיגול היחידה $\{z:|z|<1\}$ והצדיקו את תשובתכם.

פתרון:

לפני משפט רושה, נשים לב שהמכנה לא מתאפס בעיגול, וגם שהסינוס תורם אפס אחד בנקודה $z=0$. לכן מספיק לחקור את הפונקציה $f(z)=4z^3-e^z$.

על שפת עיגול היחידה $|4z^3|=4$ בעוד ש $e^{-1}\le|e^z|=e^x\le e^1$. לכן ניקח $g(z)=4z^3$. על השפה מתקיים $|f-g|=|-e^z|\le e<4=|g|$ לכן לפונקציה $f(z)$ יש שלושה אפסים כולל ריבוי בתוך העיגול (כמספר האפסים של $g(z)$ שם). כולל הסינוס והמכנה יש לפונקציה 4 אפסים בעיגול (כולל ריבוי).

עקרון הארגומנט:

אומרים שפונקציה $f(z)$ היא מרומורפית בתחום D אם היא נקודות הסינגולריות שלה שם הן מבודדות, ומהסוג: קטבים או סליקות.

משפט: תהי f מרומורפית בתחום פשוט קשר D. נניח כי $\gamma\subset D$ היא עקומת ז'ורדן (כלומר סגורה ללא חיתוכים עצמיים) נגד כיוון השעון כך של- f אין אפסים או קטבים עליה, כלומר לכל $z\in\gamma$ $f(z)\ne0,\infty$. מתקיים $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N_f-P_f$ כאשר N_f-P_f הוא מספר האפסים (כולל ריבוי) של f בתחום החסום ע"י המסילה פחות מספר הקטבים (כולל ריבוי) של f בתחום החסום ע"י המסילה.

מצד שני $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz=Ind_{f(\gamma)}(0)$.

תרגיל: חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=3}\frac{4z^3-12z^2+8}{z^4-4z^3+8z-2}dz$.

פתרון זהו אינטגרל מהסוג $\oint\frac{f'}{f}$ עבור $f(z)=z^4-4z^3+8z-2$. לפונקציה זו יש 3 אפסים בתחום החסום ע"י המעגל, ואין לה קטבים כלל (היא אנליטית). לכן

$$\oint_{|z|=3}\frac{4z^3-12z^2+8}{z^4-4z^3+8z-2}dz=2\pi i(3-0)=6\pi i$$

תרגיל ממבחן: תהי $f \in H\left(\overline{B(0,1)}\right)$ ונניח ש-$f(0)=1$ וש-$\left|f(z)\right|>2$ עבור כל z כך ש-$|z|=1$. הוכיחו כי $B(0,2)\subseteq f\left(B(0,1)\right)$ (רמז: עקרון הארגומנט).

פתרון: נתבונן באינטגרל $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)-1}dz$.

מצד אחד זה שווה ל-$N_{f-1}-P_{f-1}$ כאשר N_{f-1} הוא מספר האפסים של $f(z)-1$ בעיגול היחידה ו-P_{f-1} הוא מספר הקטבים שם. הפונקציה $f-1$ אנליטית ולכן $P=0$, ונתון $f(0)-1=1-1=0$, מכאן $N\geq 1$. ע"פ עקרון הארגומנט נסיק כי $Ind_{f(\gamma)}(1)\geq 1$.

נתון כי $f(\gamma)$ נמצא מחוץ למעגל $|z|=2$ ולכן המסילה הזו מקיפה את 1 בדיוק כמספר הפעמים שהיא מקיפה כל נקודה אחרת $a\in B(0,2)$. כלומר $Ind_{f(\gamma)}(a)=Ind_{f(\gamma)}(1)$ לכל a כך ש-$|a|<2$. נפעיל שוב את עקרון הארגומנט לקבל $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz=Ind_{f(\gamma)}(a)\geq 1$

בגלל שהפונקציה $f-a$ אנליטית, $P_{f-a}=0$, ונסיק שיש לה לפחות אפס אחד בעיגול $|z|<1$. כלומר לכל $a\in B(0,2)$ יש איזה $z_0\in B(0,1)$ כך ש-$a=f(z_0)$. זה מוכיח את ההכלה $B(0,2)\subseteq f\left(B(0,1)\right)$.

העתקות קונפורמיות:

הגדרה: אומרים שהעתקה $f:D\to\mathbb{C}$ היא קונפורמית בנקודה $z_0\in D$ אם $f'(z_0)\neq 0$. אומרים ש-f קונפורמית בכל D אם $f'(z)\neq 0$ לכל $z\in D$. ישנה משמעות גאומטרית והיא "שימור זוויות".

משפט ההעתקה של רימן אומר שלכל תחום פשוט קשר $D\subseteq\mathbb{C}$, שהוא לא כל $\mathbb{C}$ קיימת העתקה קונפורמית $f:D\to\left\{|z|<1\right\}$ שהיא חח"ע ועל.

מכאן ננסה למצוא העתקות קונפורמיות בין תחומים שונים.

דוגמא: ההזה מהסוג $f(z)=z-a$ היא קונפורמית בכל נקודה כי $f'(z)=1\neq 0$.

חזקות, $f(z)=z^n$ הן קונפורמיות בכל נקודה חוץ מהראשית.

תרגיל: תהי $w=f(z)=z^2$. עבור $a\neq 0, b\neq 0$ הוכיחו כי הקווים המאונכים $x=a, y=b$ במישור z עוברים לעקומות מאונכות במישור w.

פתרון: הקווים נחתכים בנקודה $a+bi\neq 0$ ו-f קונפורמית שם. מכאן שגם העקומות במישור w מאונכות זו לזו.

העתקות מביוס הן פונקציות מהצורה $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$. כאשר $ad-bc\neq 0$. הוכחתם בהרצאה כי הן מעבירות מעגלים מוכללים (=מעגל או ישר) אל מעגלים מוכללים.

תרגיל: הוכיחו שההעתקה $w=T(z)=\frac{i(1-z)}{1+z}$ מעבירה את עיגול היחידה על חצי המישור העליון.

פתרון: הנקודות $1,i,-i$ עוברות אל הנקודות $0,1,-1$ ולכן המעגל $|z|=1$ עובר לציר הממשי. אם ניקח נקודה בתוך התחום, למשל $z=0$ נקבל שהתמונה שלה היא i שנמצאת בחצי המישור העליון.

תרגיל: מצאו העתקה בין רבע המישור $\{x>0,y>0\}$ לבין עיגול היחידה.

פתרון: $z_1=z^2$ מביאה את רבע המישור על חצי המישור העליון, וההעתקה ההפוכה לזו בסעיף הקודם מביאה את חצי המישור העליון על עיגול היחידה.

תרגיל: מצאו העתקה בין התחום המשותף לשני המעגלים $|z|<1,|z-1|<1$ לבין חצי מישור.

פתרון: המעגלים נחתכים בנקודות $e^{\pm\pi i/3}$.

ההעתקה $z_1=\frac{z-e^{\pi i/3}}{z-e^{-\pi i/3}}$ היא העתקת מביוס ששולחת את נקודות החיתוך אל $0,\infty$ ולכן הקשתות ביניהן עוברות לקווים ישרים. ע"י חזקה מתאימה $z_2=z_1^{\alpha}$ מקבלים חצי מישור.

דוגמא אחרונה: העתקת זוקובסקי $J(z)=z+\frac{1}{z}$ (לפעמים מגדירים עם חצי) היא קונפורמית בנקודות $z\neq 0,1,-1$ כי $J'(z)=1-\frac{1}{z^2}$ מוגדרת ושונה מאפס שם. זוקובסקי גילה שהתמונה של מעגל דרך הנקודה $z=1$ המקיף את הנקודה $z_2=-1$ נראית כמו פרופיל של כנף מטוס. ולכן יש שימוש להעתקה זו באווירודינמיקה.