תרגול 2 - אינפי 4

7 במרץ 2016

תקציר

פרמטריזציה ואורך של עקומה - דוגמואות נוספות, אוריינטציה, אינטגרל קווי לפי אורך.

1 עקומות - תזכורת

כאשר אנחנו מדברים על עקומה $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$, אנו מעוניינים להגדיר מושגים כמו אורך או אינטגרל של פונקציה סקלרית על Γ שבלתי תלוייה בפרמטריזציה שלה. ההגדרה הבאה נועדה להקל על הבעיה.

הגדרה 1. תהי Γ עקומה ב $\mathbb{R}^n$ עם הצגות פרמטריות $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ו $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$. אומרים ש γ ו β עקומות שקולות, אם קיימת פונ' גזירה ברציפות $\phi : [a,b] \to [c,d]$ כך ש

1. $\phi'(t) > 0$ לכל $t \in [a,b]$
2. ϕ על ($\phi([a,b]) = [c,d]$).
3. מתקיים $\alpha = \beta \circ \phi$.

הגדרה 2. המסילה $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ נקראת בעלת מהירות יחידה אם לכל $t \in [a,b]$ מתקיים $\|\gamma'(t)\| = 1$.

משפט 1. כל עקומה שקולה לעקומה בעלת מהירות יחידה.

על אוריינטציה של עקומה בעצם ככיוון התקדמות. יש שני כיווני התקדמות אפשריים. ניתן לפרמל את ההגדרה עבור עקומות חלקות באופן הבא:

הגדרה 3. תהי $\gamma : [a,b] \to \Gamma$ מסילה חלקה בעלת תמונה Γ. לכל $\gamma(t) = x \in \Gamma$ נגדיר את הוקטור יחידה $T(x) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$. הפונקציה T היא פונקציה רציפה ונקראת אוריינטציה של Γ והזוג (Γ, T) נקרא עקומה מכוונת. לעיתים כשנדבר על עקומות מכוונות נשמיט את T ונרשום Γ ו$-\Gamma$ במקום $(\Gamma, -T)$.

תרגיל 1. תהיינה α ו β עקומות שקולות בעלות תמונה Γ. הוכח שהן מגדירות את אותה אוריינטציה.

פתרון: נסמן ב T את האוריינטציה שמגדירה α על Γ וב S את האוריינטציה שמגדירה β. כיוון ש α ו β שקולות קיימת $\phi : [a,b] \to [c,d]$ חח"ע ועל וגזירה ברציפות עם $\phi'(t) > 0$ כך ש $\alpha = \beta \circ \phi$. יהי $\alpha(t) = x \in \Gamma$ אזי.

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{(\beta \circ \phi)'(t)}{\|(\beta \circ \phi)'(t)\|} = \frac{\beta'(\phi(t))\,\phi'(t)}{\|\beta'(\phi(t))\,\phi'(t)\|} \\ &= \frac{\beta'(\phi(t))\,\phi'(t)}{\|\beta'(\phi(t))\|\,|\phi'(t)|} \overset{\phi'(t)>0}{=} \frac{\beta'(\phi(t))}{\|\beta'(\phi(t))\|} \\ &= S(\beta(\phi(t))) \overset{\alpha(t)=\beta(\phi(t))}{=} S(x) \end{aligned}$$

מסקנה 1. לשתי עקומות שקולות יש אותה אוריינטציה.

תרגיל 2. האם העקומות הבאות שקולות?

1. $\alpha(t) = (\cos t, \sin t) : t \in [0, 2\pi]$
2. $\beta(s) = (\cos(-s), \sin(-s))$: $s \in [0, 2\pi]$

פתרון: נבדוק האם העקומות מגדירות את אותה אוריינטציה. α ו β הן פרמטריזציות של מעגל היחידה הקנוני S^1. יהי $x \in S^1$. אזי קיימים t ו s כך ש

$$x = (\cos t, \sin t) = (\cos(-s), \sin(-s)).$$

כאשר $s = 2\pi - t$ נסמן ב $T(x)$ את האוריינטציה המושרית מ α ו S את האוריינטציה המושרית מ β. מתקיים:

$$T(x) = (-\sin t, \cos t)$$

ו

$$S(x) = (\sin(-s), -\cos(-s)) = (\sin(t - 2\pi), -\cos(t - 2\pi)) = (\sin t, -\cos t) = -T(x).$$

האוריינטציות שונות ולכן העקומות אינן שקולות.

2 פרמטריזציה - דוגמאות נוספות

תרגיל 3. מצא הצגה פרמטרית של העקומה המתקבלת כתוצאה של חיתוך האליפסויד $z = x^2 + y^2 + 1$ עם המישור $z = 2x + 2y + 3$.

פתרון: נציב את המשוואה הראשונה בשניה ונקבל:

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 3 &= x^2 + y^2 + 1 \\ &\Downarrow \\ x^2 - 2x + y^2 - 2y &= 2 \\ &\Downarrow \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 &= 4 \end{aligned}$$

נסמן $x - 1 = 2\cos t$, $y - 1 = 2\sin t$, $z = 2(2\cos t + 1) + 2(2\sin t + 1) + 3 = 4\cos t + 4\sin t + 7$ ונקבל את הפרמטריזציה הרצוייה. $t \in [a, b]$.

תרגיל 4. מצא פרמטריזציה של חיתוך המעגל $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ עם הגליל $x^2 + y^2 = Rx, z > 0$.

פתרון: נסמן: $x = \rho\cos t, y = \rho\sin t$ עם $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. המשוואה של הגליל הופכת ל $\rho^2 = R\rho\cos t$ ומכיוון ש ρ מתאפס רק כאשר $t = \pm\frac{\pi}{2}$ השוויון הופך להיות $\rho = R\cos t$. מכאן מקבלים

$$\begin{aligned} x &= R\cos^2 t \\ y &= R\cos t\sin t \\ z &= \sqrt{R^2 - R^2\cos^4 t - R^2\cos^2 t\sin^2 t} = \sqrt{R^2\sin^2 t} = R|\sin t| \end{aligned}$$

ולכן הפרמטריזציה הדרושה היא $\gamma(t) = \left(R\cos^2 t, R\cos t\sin t, R|\sin t|\right) : t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3 אדיטיביות של אורך עקומה

הגדרה 4. עבור העקומות $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ו $\beta : [b, c] \to \mathbb{R}^n$ כך ש $\alpha(b) = \beta(b)$. השרשור שלהן $\alpha * \beta : [a, c] \to \mathbb{R}^n$ מוגדר כ =

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(t) & t \in [a, b] \\ \beta(t) & t \in [b, c] \end{cases}$$

משפט 2. $L\left(\alpha*\beta\right)=L\left(\alpha\right)+L\left(\beta\right)$.

מסקנה 2. תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^{n}$,$[c,d]\subseteq[a,b]$ ו $\tilde{\gamma}:[c,d]\to\mathbb{R}^{n}$ המוגדרת על ידי $\tilde{\gamma}\left(t\right)=\gamma\left(t\right)$. אזי $L\left(\tilde{\gamma}\right)\leq L\left(\gamma\right)$.

בתרגול הקודם ראינו שאם העקומה גזירה ברציפות, אפשר להשתמש בנוסחא $L\left(\gamma\right)=\int_{a}^{b}\left\Vert \gamma'\left(t\right)\right\Vert dt$. מה קורה כאשר γ אינה גזירה ברציפות?

תרגיל 5. תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^{n}$ עקומה, כך כך שלכל $a<c<d<b$, $\gamma'\left(t\right)$ קיימת ורציפה. הוכח: אם האינגרל $\int_{a}^{b}\left\Vert \gamma'\left(t\right)\right\Vert dt$ מתכנס, אזי γ בעלת אורך ומתקיים $L\left(\gamma\right)=\int_{a}^{b}\left\Vert \gamma'\left(t\right)\right\Vert dt$.

פתרון: נשים לב שמכיוון ש γ רציפה על קטע סגור היא רציפה במ"ש שם. ולכן לכל $\epsilon>0$ קיים δ כך שאם $\left|x-y\right|<\delta$ אזי $\left\Vert \gamma'\left(x\right)-\gamma'\left(y\right)\right\Vert <\frac{\epsilon}{2}$. אזי לכל חלוקה $P=\left\{ p_{k}\right\} _{k=0}^{n}$ עבורה פרמטר החלוקה קטן מ δ מתקיים

$$\begin{aligned}
S\left(\gamma,P\right) & = & \sum_{k=1}^{n}\left\Vert \gamma\left(p_{k}\right)-\gamma\left(p_{k-1}\right)\right\Vert \\
 & = & \left\Vert \gamma\left(p_{1}\right)-\gamma\left(p_{o}\right)\right\Vert +\left\Vert \gamma\left(p_{n}\right)-\gamma\left(p_{n-1}\right)\right\Vert +\sum_{k=2}^{n-1}\left\Vert \gamma\left(p_{k}\right)-\gamma\left(p_{k-1}\right)\right\Vert \\
 & \leq & \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}+\int_{p_{1}}^{p_{n-1}}\left\Vert \gamma'\left(t\right)\right\Vert dt\leq\epsilon+\int_{a}^{b}\left\Vert \gamma'\left(t\right)\right\Vert dt
\end{aligned}$$

מכיוון שלכל חלוקה P קיימת חלוקת עידון P' עם פרמטר חלוקה קטן מ δ מתקיים

$$L\left(\gamma\right)=\sup_{P\vdash[a,b]}\left\{ S\left(\gamma,P\right)\right\} \leq\int_{a}^{b}\left\Vert \gamma'\left(t\right)\right\Vert dt+\epsilon$$

והבניה עובדת לכל ϵ מתקיים $L\left(\gamma\right)\leq\int_{a}^{b}\left\Vert \gamma'\left(t\right)\right\Vert dt$. על מנת להראות את אי שווין השני נשים לב שלכל $a<c<d<b$ מתקיים

$$L\left(\gamma\right)=\sup_{P\vdash[a,b]}\left\{ S\left(\gamma,P\right)\right\} \geq\sup_{T\vdash[c,d]}\left\{ S\left(\gamma,T\right)\right\} =\int_{c}^{d}\left\Vert \gamma'\left(t\right)\right\Vert dt$$

ולכן

$$L\left(\gamma\right)\geq\lim_{\substack{c\to a\\ d\to b}}\int_{c}^{d}\left\Vert \gamma'\left(t\right)\right\Vert dt=\int_{a}^{b}\left\Vert \gamma'\left(t\right)\right\Vert dt.$$

מסקנה 3. מהתרגיל ומאדיטיביות של אורך מקבלים שהנוסחה נכונה גם עבור עקומות שעבורן $\gamma'\left(t\right)$רציפה למקוטעין בתנאי שהאינטגרל מתקכנס בכל קטע בין נקודות האי רציפות.

4 אינטגרל לפי אורך

הגדרה 5. תהי Γ עקומה בעלת פרמטריזציה $\gamma:[a,b]\to\Gamma$, $f:U\to\mathbb{R}^{n}$ עם $\Gamma\subset U$.לכל חלוקה $\mathscr{P}=p_{0}<p_{1}<\cdots<p_{k}$ של $[a,b]$ ובחירת נקודות $t_{i}^{*}\in[p_{i-1},p_{i}]$ נתאים את הסכום $S\left(f,\mathscr{P},t\right)\sum_{j=1}^{n}f\left(\gamma(t_{i}^{*})\right)\left|\gamma(p_{i})-\gamma(p_{i-1})\right|$. במידה וקיים הגבול $I=\lim_{\lambda(\mathscr{P})\to0}S(f,\mathscr{P},t)$, הוא נקרא אינטגל לפי אורך או אינגרל קווי מסוג ראשון. נאמר ש f אינגרבילית $I=\int_{\gamma}f\mathbf{d}l$.

משפט 3. תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ עקומה חלקה, אזי $\int_\gamma f\mathbf{d}l=\int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt$. לכל עקומה β ששקולה ל γ מתקיים

$$\int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt=\int_c^d f(\beta(t))\,|\beta'(t)|\,dt\ .$$

כלמר - עבור עקומה חלקה, האינגרל אינו תלוי בפרמטריזציה.

תרגיל 6. חשבו את האינטגרלים הבאים:

1. $\int_\Gamma x^2y\mathbf{d}l$ כאשר $\Gamma=\left\{(x,y):x^2+y^2=R^2,y\geq 0\right\}$.

פתרון: נבחר פרמטריזציה $\gamma(t)=(R\cos t,R\sin t):t\in[0,\pi]$. לפי הנוסחה מהמשפט הקודם נקבל

$$\begin{aligned}\int_\Gamma x^2y\mathbf{d}l &= R^3\int_0^\pi \cos^2 t\sin t\left|(R\cos t,R\sin t)'\right|dt=R^4\int_0^\pi\cos^2 t\sin t\mathbf{d}t=2R^4\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin t\mathbf{d}l\\ &= 2R^4\int_0^1 x^2dt=\frac{2}{3}R^4\end{aligned}$$

2. $\int_\Gamma |y|\,dl$ כאשר $\Gamma=\left\{(x,y):\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)\right\}$.

פתרון: נשים לב שהעקומה סימטרית ביחס לצרים לכל ציר וערך הפונקציה y אינו תלוי ברביע בו היא נמצאת ולכן מספיק לחשב את האינגרל

$$\int_{\Gamma'}|y|\,dl:\Gamma'=\left\{(x,y):x^2+y^2=a^2\left(x^2-y^2\right)\wedge x\geq 0\wedge y\geq 0\right\}$$

ולהכפיל אותו ב 4. נבצע הצבה: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ בקואודינטות פולריות העקומה הופכת ל

$$r^4=a^2r^2(\cos 2\theta)\Leftrightarrow r^2=a^2\cos 2\theta\Leftrightarrow r=a\sqrt{\cos 2\theta}$$

נשים לב, שהפונקציה לא מוגדרת לכל $\theta\in[0,\frac{\pi}{4}]$ אלא רק לערכי θ עבורם $\cos 2\theta>0$ (מה שהגיוני - כי מהמהשאווה המקורית לכל נקודה על העקומה $|x|>|y|$). דהיינו, $t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. קיבלנו פרמטריזציה ל Γ'. $\gamma(t)=\left(a\sqrt{\cos 2t}\cos t,a\sqrt{\cos 2t}\sin t\right)$. נשים לב שהעקומה אינה חלקה - ב $t=\frac{\pi}{4}$, γ אינה גזירה. על מנת לחשב את האינטגרל נקרב אותו בעזרת איטגרל לא אמיתי

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\int_0^x\left|a\sqrt{\cos 2t}\sin t\right|\left\|\left(a\sqrt{\cos 2t}\cos t,a\sqrt{\cos 2t}\sin t\right)'\right\|dt\ .$$

נחשב את הביטוי

$$\begin{aligned}\left(a\sqrt{\cos 2t}\cos t,a\sqrt{\cos 2t}\sin t\right)' &= a\left(\frac{-\sin 2t\cos t-\sin t\cos 2t}{\sqrt{\cos 2t}},\frac{-\sin 2t\sin t+\cos t\cos 2t}{\sqrt{\cos 2t}}\right)\\ &\overset{trigo\,identity}{=} a\left(\frac{\sin(-3t)}{\sqrt{\cos 2t}},\frac{\cos 3t}{\sqrt{\cos 2t}}\right)\end{aligned}$$

מתקיים

$$\left\|a\left(\frac{\sin(-3t)}{\sqrt{\cos 2t}},\frac{\cos 3t}{\sqrt{\cos 2t}}\right)\right\|=\frac{a}{\sqrt{\cos 2t}}$$

נציב באינטגרל ונקבל

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\int_0^x\left|a\sqrt{\cos 2t}\sin t\right|\left\|\left(a\sqrt{\cos 2t}\cos t,a\sqrt{\cos 2t}\sin t\right)'\right\|dt &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\int_0^x\left|a\sqrt{\cos 2t}\sin t\right|\frac{a}{\sqrt{\cos 2t}}dt\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}a^2\int_0^x\sin t dt=-a^2\cos t|_0^{\frac{\pi}{4}}\\ &= a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned}$$

ולכן $\int_\Gamma |y|\, dl = 4a^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$