שיעורי בית 3

1. מצאו צורת זורדן למטריצה

$$A=\begin{pmatrix}3&0&1&0\\8&-3&1&-2\\0&0&3&0\\-8&2&-3&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times4}$$

פתרון:

$$p_A(x)=\left|\begin{pmatrix}x-3&0&-1&0\\-8&x+3&-1&2\\0&0&x-3&0\\8&-2&3&x-1\end{pmatrix}\right|=(x-3)\left|\begin{pmatrix}x-3&0&0\\-8&x+3&2\\8&-2&x-1\end{pmatrix}\right|=(x-3)^2\left|\begin{pmatrix}x+3&2\\-2&x-1\end{pmatrix}\right|=(x-3)^2(x$$

ולכן הע"ע הם -1, 3. מ"ע ומ"ע מוכללים. עבור $x=3$:

$$N(A-3I)=N\begin{pmatrix}0&0&1&0\\8&-6&1&-2\\0&0&0&0\\-8&2&-3&-2\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}0&0&1&0\\8&-6&1&-2\\0&0&0&0\\0&-4&-2&-4\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}8&-6&0&-2\\0&-4&0&-4\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=$$

$$=N\begin{pmatrix}8&0&0&4\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}1&0&0&1/2\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}-1/2t\\-t\\0\\t\end{pmatrix}:\ t\in\mathbb{R}^4\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$$N(A+I)=N\begin{pmatrix}4&0&1&0\\8&-2&1&-2\\0&0&4&0\\-8&2&-3&2\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}4&0&1&0\\0&-2&-1&-2\\0&0&4&0\\0&2&-1&2\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}4&0&1&0\\0&-2&-1&-2\\0&0&4&0\\0&0&-2&0\end{pmatrix}=$$

$$=N\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&-2&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}0\\-t\\0\\t\end{pmatrix}:\ t\in\mathbb{R}^4\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן $m_A(x)=p_A(x)$ ולכן צורת זורדן היא

$$\begin{pmatrix}3&1&&\\&3&&\\&&-1&1\\&&&-1\end{pmatrix}$$

2. תהא $A=J_5(0)$. מצאו צורת זורדן של A^2,A^3.

פתרון: מתקיים כי

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&1&&\\&0&0&1&\\&&0&0&1\\&&&0&0\\&&&&0\end{pmatrix},A^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1&\\&0&0&0&1\\&&0&0&0\\&&&0&0\\&&&&0\end{pmatrix}$$

ולכן הר"ג של 0 עבור A^2 הוא 2 ועבור A^3 הוא 3. בנוסף $m_{A^2}(x)=x^3, m_{A^3}(x)=$ x^2 כי $m_A(x)=x^5$ ולכן

$$J(A^2)=J_3(0)\oplus J_2(0),\ J(A^3)=j_2(0)\oplus J_2(0)\oplus J_1(0)$$

3. יהיו $S,T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ שתי ה"ל כך שמתקיים $\deg m_T, \deg m_S\leq 2$. הוכיחו כי קיים להם ו"ע משותף (כלומר קיים $v\neq 0$ כך ש v ו"ע גם של T וגם של S). הדרכה: הוכיחו כי קיים מ"ע מימד 2 לפחות.

פתרון: אם $m_T(x)=(x-\lambda)^2$ אזי צורת זורדן כי $\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda\end{pmatrix}$ והמ"ע V_λ מימד 2. אם $m_T(x)=(x-\lambda)(x-\mu)$ כאשר λ,μ שונים אזי T לכסינה והר"א של אחד מה"ע הוא 2 וזהו גם הר"ג שלו.

אם $m_T(x)=x-\lambda$ אזי V_λ מימד 3. בכל מקרה נקבל כי קיים λ ע"ע של T כך שV_λ מימד 2 לפחות. באותו אופן קיים μ ע"ע של S כך ש V_μ מימד 2 לפחות. ממשפט המימדים נקבל כי החיתוך שלהם לא ריק ולכן קיים ו"ע משותף.

4. בתרגיל זה נמצא שורש של מטריצה מרוכבת הפיכה.

(א) נסמן: $A=J_k(\lambda_0)=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \lambda_0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ & & & & \lambda_0\end{pmatrix}$ כאשר $\lambda_0\neq 0$. נגדיר

$$B=J_k(\sqrt{\lambda_0})=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_0} & 1 & & & \\ & \sqrt{\lambda_0} & 1 & & \\ & & \sqrt{\lambda_0} & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ & & & & \sqrt{\lambda_0}\end{pmatrix}$$

מצאו בעזרת B מטריצה Q המקיימת $Q^2=A$.

(ב) נסמן:

$$A=\begin{pmatrix}J_{k_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_t}(\lambda_t)\end{pmatrix}$$

כאשר $\lambda_i\neq 0$, מצאו Q המקיימת $Q^2=A$.

(ג) תהי $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ הפיכה. מצאו Q המקיימת $Q^2=A$.

(ד) הוכיחו כי קיימת מטריצה מרוכבת A שאין לה שורש.

פתרון: א. נקבל:

$$B^2 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 2\sqrt{\lambda_0} & 1 & & \\ & \lambda_0 & 2\sqrt{\lambda_0} & \ddots & \\ & & \lambda_0 & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 2\sqrt{\lambda_0} \\ & & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

מתקיים עבורה כי

λ	Alg.=# λ	Geo.=# Blocks	Power in m_A = Biggest Block
λ_0	k	1	*

ולכן היא דומה ל A כלומר $P^{-1}B^2P = A$ ואז

$$\left(P^{-1}BP\right)^2 = \left(P^{-1}BP\right)\left(P^{-1}BP\right) = A$$

ב. מתקיים כי לכל i מתקיים כי $J_{k_i}(\lambda_i)$ קיימת B_i המקיימת $B_i^2 = J_{k_i}(\lambda_i)$ ואז

$$\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_t \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} B_1^2 & & & \\ & B_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_t}(\lambda_t) \end{pmatrix} = A$$

ג. מתקיים כי $J \sim A$ וקיימת B כך ש $B^2 = J = P^{-1}AP$ ואז

$$A = PB^2P^{-1} = \left(PBP^{-1}\right)\left(PBP^{-1}\right)$$

ד. פתרון: $J_2(0)$. אם יש לה שורש B אזי $B^4 = 0$ ואז x^4 מאפס את B ולכן x^2 אופייני. סתירה.