תירגול 12

טופלוגית המנה והעתקת המנה

1. הגדרה: יהא (X,τ) מ״ט ו $\sim$ יחס שקילות עליו. נסמן את פונקצית ההטלה הטבעית $\rho:$ $X \to {}^{X}\!/\!_{\sim}$ שמוגדרת ע״י $x \mapsto [x]$ (כלומר, כל איבר הולך למחלקת השקילות שלו). ונגדיר טופלוגיה על קבוצת המנה ${}^{X}\!/\!_{\sim}$ להיות הטופולוגיה המינימנלית בה ρ רציפה. כלומר O פתוחה בקבוצה המנה אמ״מ $\rho^{-1}(O)$ פתוחה ב X.

   (א) דוגמא: $\mathbb{R}$ עם היחס השקילות $|x| = |y| \iff x \sim y$. הקבוצה $\text{"}[0,1)\text{"} =$ $\{[x] : x \in [0,1)\}$ פתוחה ב ${}^{\mathbb{R}}\!/\!_{\sim}$ כי התמונה ההפוכה של ρ היא $(-1,1)$

   (ב) הערה: זה מקרה פרטי של ההגדרה הבא: יהיו (X,τ) מ״ט, Y קבוצה ו $f: X \to Y$ על. טופלוגיה המנה על Y היא הטופולגיה המוגדרת כך: O פתוח ב Y אמ״מ $f^{-1}(O)$ פתוח ב X.

   (ג) הגדרה קשורה: יהיו X,Y מ״ט ותהא $f: X \to Y$ על. נאמר ש f העתקת מנה אם O פתוח ב Y אמ״מ $f^{-1}(O)$ פתוח ב X.

      i. דוגמא: $f: X \to Y$ על כאשר Y עם טופלוגית המנה.

      ii. דוגמא: עבור $f: X \to Y$ רציפה, על ופתוחה היא מנה. (כי O פתוחה ב Y גורר $f^{-1}(O)$ פתוחה ב X מרציפות. מצד שני אם $f^{-1}(O)$ פתוחה ב X אזי התמונה $ff^{-1}(O) = O$ פתוחה ב X (השיוון מכך ש f על).

      iii. דוגמא: עבור $f: X \to Y$ רציפה, על וסגורה היא מנה. (כי O פתוחה ב Y גורר $f^{-1}(O)$ פתוחה ב X מרציפות. מצד שני אם $f^{-1}(O)$ פתוחה ב X המשלים סגור ב X ואז $f(X \backslash f^{-1}(O)) = Y \backslash O$ כי $f(x)$ עבור $x \in X$ ו $f(x) \notin O$ מקיים $f(x) \in Y \backslash O$. מצד שני עבור $y \in Y \backslash O$ קיים $x \in X$ כך ש $f(x) = y$ והוא גם מקיים $x \notin f^{-1}(O)$).

      iv. דוגמא: ההטלות $P_i : \prod X_j \to X_i$ הם רציפות על ופתוחות ולכן מנה.

      v. דוגמא: פונקציה f מקומפקטי ל T_2 היא סגורה ולכן אם היא רציפה ועל היא מנה.

2. תרגיל: תהא $f: X \to Y$ מנה אזי f הומיאומורפיזם אמ״מ f חח״ע.
   פתרון: $(\Leftarrow)$ ברור. $(\Rightarrow)$ נתון כי f על+חח״ע + O פתוח אמ״מ $f^{-1}(O)$ ולכן רציפה. נותר להוכיח כי f פתוחה: אכן: יהא U פתוחה ב X אזי $U = f^{-1}f(U)$ ולכן $f(U)$ פתוחה ב Y.

3. הגדרה: יהיו X,Y מ״ט ו $\sim$ יחס שקילות על X. נאמר כי פונק' $f: X \to Y$ מכבדת את יחס השקילות אם $x_1 \sim x_2$ אז $f(x_1) = f(x_2)$. במקרה זה נוכל להגדיר פונקציה

$\hat{f} : {}^{X}/_{\sim} \to Y$ ע״י $\hat{f}([x]) = \hat{f}(\rho(x)) = f(x)$. או בציור הדיאגרמה

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f=\hat{f}\circ\rho"] \arrow[dr, "\rho"'] & Y \\ & {}^{X}/_{\sim} \arrow[u, "\hat{f}"'] \end{tikzcd}$$

מוגדרת ומתחלפת.

(א) תכונות:

i. $\hat{f}$ מוגדרת אמ״מ f מכבדת את יחס השקילות.

ii. $\hat{f}$ מוגדרת וחח״ע אמ״מ [$x_1 \sim x_2$ אמ״מ $f(x_1) = f(x_2)$]

iii. במידה ו $\hat{f}$ מוגדרת אזי:

א׳. f על אמ״מ $\hat{f}$ על. (כי ρ על: הרכבה של על היא על ומצד שני אם הרכבה היא על אז השמאלית היא על)

ב׳. f רציפה אמ״מ $\hat{f}$ רציפה. (כי ρ רציפה: הרכבה של רציפות היא רציפה ומצד שני אם $f^{-1}(O) = \rho^{-1}\hat{f}^{-1}(O)$ פתוחה ב X אזי $\hat{f}^{-1}(O)$ פתוחה בקבוצה המנה לפי הגדרת ρ)

ג׳. f מנה אמ״מ $\hat{f}$ מנה. (על הוכחנו. לכל O פתוח ב Y מתקיים כי: $f^{-1}(O) = \rho^{-1}\hat{f}^{-1}(O)$ פתוחה ב X אמ״מ $\hat{f}^{-1}(O)$ פתוח בקבוצת המנה).

4. שימוש: בהינתן מ״ט X ויחס שקילות $\sim$ נרצה למצוא Y כך ש $Y \cong {}^{X}/_{\sim}$. לשם כך נרצה למצוא פונקציה $f : X \to Y$ כך ש $\hat{f}$ מוגדרת והפיכה (כלומר f על ומתקיים $x_1 \sim x_2$ אמ״מ $f(x_1) = f(x_2)$)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f=\hat{f}\circ\rho"] \arrow[dr, "\rho"'] & Y \\ & {}^{X}/_{\sim} \arrow[u, "\hat{f}"'] \end{tikzcd}$$

ואז:

(א) או שנוכיח כי f מנה אז גם $\hat{f}$ מנה ולכן הומי׳ כי חח״ע.

(ב) או שנוכיחו רק ש f רציפה ואז $\hat{f}$ רציפה. ואז נוכיח שהיא הומי׳ (למשל, במקרה ש $\hat{f}$ מקומפקטי ל T_2 נקבל כי $\hat{f}$ הומי׳ כי היא סגורה).

5. תרגיל: $\mathbb{R}$ עם היחס השקילות $|x| = |y| \iff x \sim y$. הוכיחו כי ${}^{\mathbb{R}}/_{\sim} \cong [0, \infty)$
פתרון: נגדיר $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ע״י $f(x) = |x|$ אזי

(א) היא מכבדת את יחס השקילות ולכן מוגדרת $\hat{f}$.

(ב) גם מתקיים ש $f(x) = f(x')$ אמ״מ $(x) \sim (x')$ ולכן $\hat{f}$ חח״ע

(ג) f על ורציפה ולכן גם $\hat{f}$

בנוסף, f פתוחה, כי לכל קטע פתוח (a,b), אם $a \geq 0$ אז $f(a,b) = (a,b)$, אם $b \leq 0$ אז $f(a,b) = (-b,-a)$, ואם $a < 0 < b$ אז $f(a,b) = [0, \max\{|a|,|b|\})$. בכל מקרה, התמונה היא קבוצה פתוחה ב$[0,\infty)$. לכן $\hat{f}$ פתוחה, ומכאן ש$\hat{f}$ הומיאומורפיזם.

6. תרגיל: נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$ כך: $y = y' \iff (x,y) \sim (x',y')$. הוכיחו כי $\mathbb{R}^2/\sim \cong \mathbb{R}$.
פתרון: נגדיר $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ע"י $f(x,y) = y$ אזי

(א) היא מכבדת את יחס השקילות ולכן מוגדרת $\hat{f}$.

(ב) גם מתקיים ש $f(x,y) = f(x',y')$ אמ"מ $(x,y) \sim (x',y')$ ולכן $\hat{f}$ חח"ע

(ג) f מנה כי היא הטלה ולכן גם $\hat{f}$ מנה.

לכן $\hat{f} : \mathbb{R}^2/\sim \to \mathbb{R}$ מנה שהיא חח"ע ולכן הומי' כנדרש.

7. תרגיל: נגדיר יחס שקילות על $S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$ כך: $(x,y,z) \sim (x',y',z') \iff (x,y) = (x',y')$. הוכיחו כי $S^2/\sim \cong D$ כאשר $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\right\}$.
פתרון: נגדיר $f : S^2 \to D$ ע"י $f(x,y,z) = (x,y)$ אזי

(א) היא מכבדת את יחס השקילות ולכן מוגדרת $\hat{f}$.

(ב) גם מתקיים ש $f(x,y,z) = f(x',y',z')$ אמ"מ $(x,y,z) \sim (x',y',z')$ ולכן $\hat{f}$ חח"ע

(ג) f רציפה כצמצום של ההטלה בתחום ובטווח ולכן וגם $\hat{f}$

לכן $\hat{f} : S^2/\sim \to D$ היא חח"ע על ורציפה. בנוסף זוהי פונקציה מקבוצה קומפקטית ל T_2 ולכן סגורה ולכן הומי' כנדרש.

8. תרגיל: $\mathbb{R}$ עם היחס השקילות $\sin x = \sin y \iff x \sim y$. הוכיחו כי $\mathbb{R}/\sim \cong [0,1]$
פתרון: נגדיר $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ ע"י $f(x) = \sin(x)$ ואז $\hat{f} : \mathbb{R}/\sim \to [-1,1]$ מוגדרת על וחח"ע ורציפה. בנוסף $\mathbb{R}/\sim$ קומפקטי כי הוא תמונה רציפה של $\rho_{[0,2\pi]}$ ולכן $\hat{f}$ מקומפקטי ל T_2 ולכן סגורה ולכן הומי'.

9. תרגיל: יהא $X = \{0,1\}$ עם טופולוגית שרפינסקי $\tau = \{X, \emptyset, \{0\}\}$. נגדיר על $I = [0,1]$ יחס שקילות $\left[x,y \in [0,\frac{1}{2}) \vee x,y \in [\frac{1}{2},1]\right] \iff x \sim y$. הוכיחו כי $I/\sim \cong X$
פתרון: נגדיר $f : I \to X$ ע"י

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,\frac{1}{2}) \\ 1 & x \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

ואז $\hat{f}$ מוגדרת, חח"ע ועל. בנוסף f רציפה כי $f^{-1}\{0\} = [0,\frac{1}{2})$ פתוח ולכן $\hat{f}$ רציפה. הקבוצות הפתוחות ב $I/\sim$ הן כל המרחב, הקבוצה הריקה ו $\{[0]\}$. כיוון ש $\hat{f}(\{[0]\}) = \{f(0)\} = \{0\}$ נקבל כי $\hat{f}$ פתוחה ולכן הומי'.