פרק 10

רקורסיה

10.1 מציאת נוסחאות רקורסיה

דוגמה 10.1 (מגדלי האנוי): נתונים שלושה עמודים ודיסקיות בגדלים שונים.

במצב ההתחלתי כל הדיסקיות מונחות על העמוד הראשון כך שכל דיסקית מונחת מעל דיסקית גדולה יותר. יש להעביר את כל הדיסקיות לעמוד השלישי במספר מינימלי של מהלכים כאשר כל מהלך מורכב מהעברת דיסקית מעמוד אחד לעמוד אחר כך שבעמוד החדש היא תונח מעל דיסקית גדולה יותר.

מהו מספר המהלכים המינימלי C_n הדרוש להעברת ערימה של n דיסקיות מהעמוד הראשון לעמוד השלישי?

ובכן, בשלב כלשהו נצטרך להעביר את הדיסקית הגדולה ביותר, הנמצאת מראש בתחתית העמוד הראשון לתחתית העמוד השלישי. לפני כן יש להעביר את $n-1$ הדיסקיות האחרות מהעמוד הראשון לעמוד השני וזאת ניתן לעשות כמובן ב-C_{n-1} מהלכים. ולאחר העברת הדיסקית הגדולה יש להעבירן מהעמוד השני לעמוד השלישי וזאת שוב ב-C_{n-1} מהלכים.

קבלנו איפוא את נוסחת הנסיגה

$$C_n = 2C_{n-1} + 1; C_0 = 0$$

ועל ידי הפעלה חוזרת שלה נקבל:

$$\begin{aligned}
C_n &= 1 + 2C_{n-1} = 1 + 2(1 + 2C_{n-2}) = 1 + 2 + 4C_{n-2} = 1 + 2 + 4(1 + 2C_{n-3}) = \\
&= 1 + 2 + 4 + 8C_{n-3} = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n C_0 = \\
&= 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1
\end{aligned}$$

דוגמה 10.2: לכמה תחומים מחלקים את המישור n ישרים במצב כללי (אין שניים המקבילים זה לזה ואין שלושה מהם הנפגשים בנקודה אחת)?

נסמן מספר זה ב-d_n. נתבונן ב-n ישרים ונתייחס אליהם כאל $n-1$ ישרים וישר אחד נוסף. ישר חדש זה מפצל כל תחום ישן בו הוא עובר לשניים. יש n תחומים כאלו שכן התחום בו עובר הישר מתחלף בכל אחת מנקודות החיתוך שלו עם $n-1$ הישרים הישנים.

ואם כן מתקיימת נוסחת הרקורסיה:

$$d_n = d_{n-1} + n; \quad d_0 = 1$$

וגם כאן נוכל להגיע לנוסחה מפורשת על ידי הפעלה חוזרת של הנוסחה:

$$\begin{aligned} d_n &= d_{n-1} + n = d_{n-2} + (n-1) + n = d_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n = \dots \\ &= d_0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

דוגמה 10.3 (ריצופים): בכמה דרכים ניתן לרצף שביל באורך n על ידי שמוש במרצפות אדומות באורך 2, ירוקות באורך 2, ושחורות באורך 1?

נסמן ב-a_n את מספר הריצופים המבוקש. יש 3 דרכים אפשריות להתחיל את הריצוף:

$$a_n = \begin{cases} \text{מרצפת אדומה} \quad \underbrace{|\;\;\;\;|}_{n-2} \quad a_{n-2} \\ \text{מרצפת ירוקה} \quad \underbrace{|\;\;\;\;|}_{n-2} \quad a_{n-2} \\ \text{מרצפת שחורה} \quad \underbrace{|\;\;\;\;\;\;\;|}_{n-1} \quad a_{n-1} \end{cases}$$

לאחר הנחת מרצפת אדומה נותר שביל באורך $n-2$ אותו ניתן לרצף ב-a_{n-2} דרכים. כך גם לאחר הנחת מרצפת ירוקה ואילו לאחר הנחת מרצפת שחורה נותר שביל באורך $n-1$ אותו ניתן לרצף ב-a_{n-1} דרכים.

קבלנו לפיכך כי

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

כאשר תנאי ההתחלה הוא

$$a_0 = a_1 = 1$$

שכן יש רק דרך אחת לרצף שביל באורך 1 (ע"י מרצפת שחורה) ודרך אחת לרצף שביל באורך 0 והיא לא לעשות דבר!

הגעה לנוסחה מפורשת מנוסחה זאת אינה כה פשוטה כמו בדוגמאות הקודמות והיא תקבל תשומת לב נפרדת בסעיף הבא.

דוגמה 10.4: בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא נוסחת רקורסיה עבור a_n, מספר הסדרות הבינריות באורך n שלא מופיע בהן הרצף המצוין בתחילת הסעיף; לסדרות אלו נקרא בקיצור חוקיות. נשים לב כי תת סדרה של סדרה חוקית גם היא חוקית.

א. הרצף 11.

$$a_n : \begin{cases} 0\,\underbrace{|\qquad|}_{n-1} & a_{n-1} \\ 10\,\underbrace{|\qquad|}_{n-2} & a_{n-2} \end{cases}$$

סדרה חוקית באורך n יכולה כמובן להפתח ב-0 או ב-1.

אם הסדרה נפתחת ב-0, הרי שהמשך הסדרה היא בוודאי סדרה חוקית באורך $n-1$ ולמעשה אם נוסיף 0 לפני כל סדרה חוקית באורך $n-1$ נקבל בבירור סדרה חוקית באורך n.

מספר הסדרות החוקיות באורך n הנפתחות ב-0 שווה אם כן למספר הסדרות החוקיות באורך $n-1$, כלומר a_{n-1}.

לא כך הדבר לגבי סדרות חוקיות הנפתחות ב-1. הספרה הבאה היא בהכרח 0 אולם לאחר מכן יכולה להופיע כל סדרה חוקית באורך $n-2$. מספר הסדרות החוקיות באורך n הנפתחות ב-1 שווה אם כן למספר הסדרות החוקיות באורך $n-2$, כלומר a_{n-2}, ולסיכום נקבל את נוסחת הרקורסיה

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

נוסיף תנאי התחלה: $a_1 = 2$ (סדרה של 1 וסדרה של 0) ו-$a_0 = 1$ (סדרה ריקה).

ב. הרצף 111.

$$a_n : \begin{cases} 0\underbrace{|\qquad\quad|}_{n-1} & a_{n-1} \\ 10\underbrace{|\qquad|}_{n-2} & a_{n-2} \\ 110\underbrace{|\qquad|}_{n-3} & .\, a_{n-3} \end{cases}$$

כמקודם, ניתן להשלים את הספרה 0 לסדרה חוקית באורך n על ידי כל סדרה חוקית באורך $n-1$, אולם אין זה כך עבור הספרה 1. עם זאת, שלא כמקודם, גם לא מחויבת הספרה השניה אחרי 1 ומשום כך נפצל את הטיפול בסדרות הנפתחות ב-1 לשני תתי מקרים - כאלו הנפתחות ב-10 וכאלו הנפתחות ב-11.

לאחר פתיחה של 10 ניתן לרשום כל סדרה חוקית באורך $n-2$ על מנת לקבל סדרה חוקית באורך n ואילו לאחר 11 יש להציב ראשית 0 ולאחר מכן כל סדרה חוקית באורך $n-3$. לפיכך קבלנו כי

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$
$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 4$$

ג. הרצף 110.

$$a_n : \begin{cases} 0\underbrace{|\qquad\quad|}_{n-1} & a_{n-1} \\ 1\,0\underbrace{|\qquad\quad|}_{n-2} & a_{n-2} \\ 1\,1\,1\,1\ldots & \end{cases}$$

סעיף זה דומה מאד לסעיף הקודם אלא שהסדרה הנפתחת ב-11 ממשיכה כאן בהכרח עם 1-ים עד לסופה ופתיחה זאת מניבה אם כן רק סדרה אחת ולפיכך

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$$
$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2$$

ד. הרצף 1100.

$$a_n : \begin{cases} 0\underbrace{|\qquad\quad|}_{n-1} & a_{n-1} \\ 1\,0\underbrace{|\qquad\quad|}_{n-2} & a_{n-2} \\ & \\ 1\,1\,0\,1 <^{<}_{<} & \\ & \\ 1\,1\,1 <^{<}_{<} & \end{cases}$$

בדוגמה זאת הנסיון להפעיל את הדרך בה נקטנו בסעיפים הקודמים מסתרבל לעין שיעור מכיון שישנם פיצולים נוספים בכל שלב ושלב, לכן ננסה את הדרך הבאה:

$$a_n : \begin{cases} 0\underbrace{|\qquad\quad|}_{n-1} & a_{n-1} \\ 1\underbrace{|\qquad\quad|}_{n-1} & a_{n-1} \\ -1\underbrace{|100|\underbrace{\quad}_{n-4}|}_{n-1} & -a_{n-4} \end{cases}$$

כמו בסעיפים הקודמים ניתן גם כאן להשלים את הספרה 0 לסדרה חוקית באורך n על ידי כל סדרה חוקית באורך $n-1$. לעומת זאת לאחר הספרה 1 נקבל סדרה חוקית באורך n אם נציב סדרה חוקית באורך $n-1$ פרט לסדרות חוקיות באורך $n-1$ הנפתחות ברצף 100.

מכיון שלאחר הפתיחה 100 נוכל להציב כל סדרה חוקית באורך $n-4$ על מנת לקבל סדרה חוקית באורך $n-1$ הנפתחת ב-100, הרי שמספר הסדרות החוקיות ה"מקלקלות" הוא a_{n-4} וקבלנו אם כן

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-4}$$
$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 8$$

ה. הרצף 011.

$$a_n : \begin{cases} 1\underbrace{|\qquad\quad|}_{n-1} & a_{n-1} \\ 0\underbrace{|\qquad\quad|}_{n-1} & a_{n-1} \\ -0\underbrace{|11|\underbrace{\quad}_{n-3}|}_{n-1} & -a_{n-3} \end{cases}$$

בדומה לסעיף הקודם נקבל

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-3}$$
$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 4$$

כדאי לשים לב כי מספר הסדרות החוקיות בסעיף זה שווה למספר הסדרות החוקיות בסעיף ג', משום שהן מהוות "תמונת ראי" לסדרות ההן.

בסעיף ג' קבלנו אמנם נוסחת רקורסיה אחרת. נרשום נוסחה זאת עבור n ועבור $n-1$:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1 \\ a_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-3} + 1 \end{cases}$$

ועל ידי חיסור נקבל

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-3}$$

כלומר

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-3}$$

והגענו לנוסחה שהתקבלה בסעיף זה.

ו. הרצף 101.

בסעיף זה נציג מספר דרכי פתרון, כולן מורכבות יותר מאלו של הסעיפים הקודמים, שכן מסתבר כי הרצף 101 אינו תמים כפי שהוא אולי נראה.

פתרון ראשון:

$$a_n : \begin{cases} 0\,\underline{|\qquad\quad|} & a_{n-1} \\ 100\,\underline{|\quad\;\,|} & a_{n-3} \\ 1100\,\underline{|\quad|} & a_{n-4} \\ 111 < & \end{cases}$$

סדרה חוקית באורך n יכולה להפתח ב-0 שאחריו כמובן ניתן להציב כל סדרה חוקית באורך $n-1$, או ב-1 שאחריו דרושה זהירות רבה יותר ולכן נפצל מקרה זה לשני תת מקרים: סדרה המתחילה ב-10 חייבת להמשיך ב-0 נוסף ולאחריו סדרה חוקית באורך $n-3$. לעומת זאת אחרי הפתיחה 11 יש שוב צורך להפריד למקרים - פתיחה של 110 שלאחריה 0 נוסף ולאחר מכן כל סדרה חוקית באורך $n-4$ או פתיחה של 111 בה שוב נפריד למקרים. נמשיך באופן זה עד

למקרים הבאים לקראת סוף התהליך:

$$1\,1\,1\,1\ldots1\ \underline{|0|0|\ |\ |}\quad a_2$$

$$1\,1\,1\,1\ldots1\ \underline{|1|0|0|\ |}\quad a_1$$

$$1\,1\,1\,1\ldots1\ \underline{|1|1|0|0|}\quad a_0$$

$$1\,1\,1\,1\ldots1\ \underline{|1|1|1|\ |}\quad 2$$

וקבלנו אם כן את הנוסחה

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0 + 2$$

מנוסחה זאת נוכל לקבל נוסחה פשוטה יותר- נרשום את הנוסחה עבור n ועבור $n-1$

$$-\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4} + a_{n-5} + \cdots + a_0 + 2 \\ a_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-4} + a_{n-5} + a_{n-6} + \cdots + a_0 + 2 \end{cases}$$

נחסר:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-3} - a_{n-2}$$

וקיבלנו

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3}$$
$$a_0 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 4$$

פתרון שני:

$$a_n : \begin{cases} 0\ \underline{|\qquad\quad|}\quad a_{n-1} \\ \\ 1\ \underline{|\qquad\quad|}\quad a_{n-1} \\ \\ -1\ \underbrace{\underline{|0\ 1|\qquad|}}_{n-1} \end{cases}$$

כדי לקבל את הסדרות החוקיות באורך n נוכל להציב כל סדרה חוקית באורך $n-1$ לאחר 0 ואילו לאחר 1 נוכל להציב כל סדרה חוקית באורך $n-1$ פרט לאלו הנפתחות ב-01.

נסמן ב-b_{n-1} את מספר הסדרות ה"מקלקלות" האלו - סדרות חוקיות באורך $n-1$ הנפתחות ב-01.

סדרות כאלו נקבל אם נציב לאחר הפתיחה 01 כל סדרה חוקית באורך $n-3$ פרט לאלו המתחילות בעצמן ב-01, ואם כן

$$b_{n-1} = a_{n-1} - b_{n-3}$$

כעת לפי הניתוח בתחילת הפתרון $a_n = 2a_{n-1} - b_{n-1}$ ומכאן $b_{n-1} = 2a_{n-1} - a_n$ וגם $b_{n-3} = 2a_{n-3} - a_{n-2}$. נציב זאת בקשר שקיבלנו ונקבל

$$2a_{n-1} - a_n = a_{n-3} - (2a_{n-3} - a_{n-2})$$

כלומר

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3}$$

פתרון שלישי: למספר הסדרות ה"מקלקלות" ניתן להגיע גם באמצעות האבחנה הבאה: הסדרות החוקיות באורך $n-1$ הנפתחות ב-01 הן בדיוק הסדרות החוקיות באורך $n-1$ הנפתחות ב-0 פרט לאלו הנפתחות ב-00.

מכיון שעל מנת לקבל סדרה חוקית באורך $n-1$ ניתן להציב אחרי 0 כל סדרה חוקית באורך $n-2$ ואחרי 00 כל סדרה חוקית באורך $n-3$, נקבל אם כן כי מספר הסדרות ה"מקלקלות" הוא $a_{n-2} - a_{n-3}$ ולסיכום נקבל שוב

$$a_n = 2a_{n-1} - (a_{n-2} - a_{n-3})$$