פתרון תרגיל 5 - מופשטת 3

1

א) E שדה הפיצול של x^3-5

$$E=\mathbb{Q}[\underbrace{\sqrt[3]{5}}_{=1},\underbrace{\sqrt[3]{5}\rho_3}_{=2},\underbrace{\sqrt[3]{5}\rho_3^2}_{=3}]=\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5},\rho_3]$$

נשים לב כי $[E:\mathbb{Q}]\le 6$ אז יש לנו מקס' 6 אוטו'

אוטו'	יוצרים	תמורה
id	$\sqrt[3]{5}\mapsto\sqrt[3]{5}$ $\rho_3\mapsto\rho_3$	id
τ הצמוד המרוכב	$\sqrt[3]{5}\mapsto\sqrt[3]{5}$ $\rho_3\mapsto\rho_3^2$	$(2\,3)$
σ	$\sqrt[3]{5}\mapsto\sqrt[3]{5}\rho_3$ $\rho_3\mapsto\rho_3$	$(1\,2\,3)$
σ^2	$\sqrt[3]{5}\mapsto\sqrt[3]{5}\rho_3^2$ $\rho_3\mapsto\rho_3$	$(1\,3\,2)$
$\sigma\tau$	$\sqrt[3]{5}\mapsto\sqrt[3]{5}\rho_3$ $\rho_3\mapsto\rho_3^2$	$(1\,2)$
$\sigma^2\tau$	$\sqrt[3]{5}\mapsto\sqrt[3]{5}\rho_3^2$ $\rho_3\mapsto\rho_3^2$	$(1\,3)$

למעשה, אפשר לעצור פה: $\Rightarrow$ $\langle(2\,3),(1\,2\,3)\rangle$ יוצרים את S_3

$$\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})\cong S_3$$

(ב) E שדה הפיצול של x^7-1

השורשים הם $1, \rho_7, \dots, \rho_7^6$ $\leftarrow$ $E=\mathbb{Q}[\rho_7]$

$0 \quad 1 \quad 6$

ידוע: $[E:\mathbb{Q}]=6$
ולכן יש לה בדיוק 6 אוטו'

תמורה	יודרש	אוטו'
id	$\rho_7 \mapsto \rho_7$	id
$(124)(365)$	$\rho_7 \mapsto \rho_7^2$	$(\sigma_2^2=)\sigma_1$
$(142)(356)$	$\rho_7 \mapsto \rho_7^4$	$(\sigma_2^4=)\sigma_1^2$
(132645)	$\rho_7 \mapsto \rho_7^3$	σ_2
$(16)(34)(25)$	$\rho_7 \mapsto \rho_7^6$	σ_2^3
(154623)	$\rho_7 \mapsto \rho_7^5$	σ_2^5

$\Downarrow$

יש לנו 6 איברים בחבורה, ויש איבר מסדר 6
ולכן מיד שהיא צקלית! $Gal(E/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_6$

ג) $\in$ שדה הפיצול של x^4+1

השורשים הם: $\underset{1}{\rho_8}, \underset{2}{\rho_8^3}, \underset{3}{\rho_8^5}, \underset{4}{\rho_8^7}$ $\left(\rho_8 = e^{\frac{\pi i}{8}}\right)$

ולכן $E = \mathbb{Q}[\rho_8]$

$[E:\mathbb{Q}] = 4$

ולכן יש לG בדיוק 4 אוטו'

אוטו'	יוצרים	תמורה
id	$\rho_8 \mapsto \rho_8$	id
σ	$\rho_8 \mapsto \rho_8^3$	$(1\,2)(3\,4)$
τ	$\rho_8 \mapsto \rho_8^5$	$(1\,3)(2\,4)$
$\sigma\tau$	$\rho_8 \mapsto \rho_8^7$	$(2\,3)(1\,4)$

ולכן להראות ש- $Gal(E/\mathbb{Q}) \cong V_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

קליין ✓

② חשב את $Gal(E/\mathbb{Q}[\sqrt{2}])$

יש ∈ שדה הפיצול של x^4+1 מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

שדה הפיצול של x^4+1 מעל $\mathbb{Q}$ היה $\mathbb{Q}[\rho_8]$

ולכן מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ זה $E=\mathbb{Q}[\rho_8,\sqrt{2}]=\mathbb{Q}[\sqrt{2},i]$

$$\left(\rho_8=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$$

$[E:\mathbb{Q}[\sqrt{2}]]=2$

- $i\notin\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ולכן זה לא $=1$
- $\pm i$ הם שורשים של x^2+1

הפול' המינימלי של i מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ הוא x^2+1

ולכן σ $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$-אוטו' חייב לשלוח את i או ל-i או ל-$-i$

ומכיון שזה פול' מינימלי (אי פריק) בהכרח יש אוטו' ששולח את זה.

אוטו'	יעדים	תמורה
id	$i\mapsto i$	id
τ	$i\mapsto -i$	(12)

$$Gal(E/\mathbb{Q}[\sqrt{2}])\cong\mathbb{Z}_2 \quad -!$$

הערה: למי שלא מבין איך זה תמורה של שורשי x^4+1:

$$\tau(\rho_8)=\tau\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1+\tau(i)}{\sqrt{2}}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}=\rho_8^7$$

חשבו את (3)

$$\left[\mathbb{Q}\left[\underbrace{2\rho_3+\sqrt[3]{25}-3\rho_3\sqrt[3]{5}}_{=\alpha}\right]:\mathbb{Q}\right]$$

$\mathbb{Q}[\alpha] \subseteq \underset{\text{גלואה}}{E}$

יהי f_α פול' מינ' של α מעל $\mathbb{Q}$

לפי משפט שורשי f_α הם בדיוק $\{\sigma(\alpha) \mid \sigma\in Gal(E/\mathbb{Q})\}$.

נחשב אותם:

$$id(\alpha)=\alpha$$

$$\tau(\alpha)= 2\tau(\rho_3)+\tau(\sqrt[3]{5})^2-3\tau(\rho_3)\tau(\sqrt[3]{5})=$$
$$=2\rho_3^2+\sqrt[3]{25}-3\rho_3^2\sqrt[3]{5}$$

$$\sigma(\alpha)=2\sigma(\rho_3)+\sigma(\sqrt[3]{5})^2-3\sigma(\rho_3)\sigma(\sqrt[3]{5})=$$
$$=2\rho_3+\sqrt[3]{25}\rho_3^2-3\sqrt[3]{5}\rho_3^2$$

$$\sigma^2(\alpha)=2\rho_3+\sqrt[3]{25}\rho_3-3\sqrt[3]{5}$$

$$\sigma\tau(\alpha)=2\rho_3^2+\sqrt[3]{25}\rho_3^2-3\sqrt[3]{5}$$

$$\sigma^2\tau(\alpha)=2\rho_3^2+\sqrt[3]{25}\rho_3-3\sqrt[3]{5}\rho_3$$

יש 6 שורשים

$$f_\sigma=(x-\alpha)(x-\tau(\alpha))\cdots(x-\sigma^2\tau(\alpha))$$

ולכן $[\mathbb{Q}[\alpha]:\mathbb{Q}]=\deg f_\sigma=6$

(5) E שדה הפיצול של פולינום ספרבילי $f(x)\in F[x]$ מעל F.

נניח בשלילה $f(x) = g_1(x)g_2(x)$

ונניח a הוא שורש של $g_1(x)$ ב E.

אזי לכל $\sigma\in Gal(E/\mathbb{Q})$ מתקיים $\sigma(a)$ הוא שורש של $g_1(x)$

כלומר $\sigma(a)$ הוא לעולם לא שורש של $g_2(x)$ (f "ספרבילי"!)

כלומר יש שורשים של f שלא צמודים (תחת הפעולה של $Gal(E/\mathbb{Q})$) — <u>בסתירה</u> לכך שהפעולה

היא טרנזיטיבית.

(4) E שדה הפיצול של $f(x)$ מעל F.

(א) $F \subseteq K \subseteq E$

$\sigma_0 : K \to E$ F-הומומ'

— E הוא שדה הפיצול של f גם מעל K.
(שכן f מתפצל בו, והוא נשאר מינימלי ... מבין השדות ש-f מתפצל בהם.)

— E הוא שדה הפיצול של f גם מעל $\sigma_0(K)$ באותו אופן.

לפי התורה של שדה הפיצול, יש איזו' $\sigma : E \to E$
כך ש- $\sigma|_K = \sigma_0$

נתון ש-σ_0 הוא F-הומומ' ולכן גם σ הוא כזה.

סה"כ $\sigma \in Gal(E/F)$ ומקיים את הדרוש.

(ב)

$b\in E$ ~~[illegible]~~ עם פו' מינימלי g מעל K

$b'\in E$ שורש של $\hat{\sigma}_0(g)$.

לפי (ה) יש $\sigma\in Gal(E/F)$ כך ש $\sigma|_K=\sigma_0$.

נתבונן ב $\sigma_0^{-1}(b')$ הוא שורש של g ($=\hat{\sigma}_0^{-1}\hat{\sigma}_0 g$).

יותר מזה, g הוא פו' מינימלי של מעל K.

ולכן $K[\sigma^{-1}(b')]\cong K[x]/\langle g\rangle \cong K[b]$

ויש איזו': $\psi: K[\sigma^{-1}(b')]\to K[b]$

$\sigma^{-1}(b')\mapsto b$

~~[illegible]~~ לפי סעיף (ה) יש $\varphi\in Gal(E/F)$ כך ש $\varphi|_{K[b]}=\psi^{-1}$

(במקום K נקרא את $K[b]$)

$\varphi(b)=\sigma^{-1}(b')$

נקח את $\sigma\circ\varphi\in Gal(E/F)$

היא מקיימת:

$\sigma\circ\varphi(b)=b'$

(ג) נבחן את $\sigma\circ\varphi$:

$\sigma\circ\varphi|_K = \sigma|_K=\sigma_0$

φ היא K-אוטומורפיזם,

כלומר $\varphi|_K=id_K$

כמו שצריך.