

פתרון תרגיל בית 7

שאלה 1

חשב את האינטגרלים הבאים, או הוכח שאינם קיימים:

$$\begin{array}{lll} \int_0^{\infty} \cos x dx & \text{ג.} & \int_0^{\infty} x e^{-x} dx & \text{ב.} & \int_2^{\infty} \frac{x+1}{x^2(1-x)} dx & \text{א.} \\ \int_2^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4-1}} & \text{ו.} & \int_{-\infty}^{\infty} x \sin x^2 dx & \text{ה.} & \int_{-\infty}^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx & \text{ד.} \end{array}$$

פתרון שאלה 1

סעיף א

$$\int_2^{\infty} \frac{x+1}{x^2(1-x)} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{x+1}{x^2(1-x)} dx$$

$$\frac{x+1}{x^2(1-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1-x}$$

$$x+1 = A \cdot x(1-x) + B(1-x) + Cx^2$$

$$x=0: 1=B$$

$$x=1: 2=C$$

$$x=-1: 0=-2A+2+2 \Rightarrow A=2$$

$$\begin{aligned} I &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{1-x} \right) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x-1} \right) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[2 \ln|x| - \frac{1}{x} - 2 \ln|x-1| \right]_2^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(2 \ln|b| - \frac{1}{b} - 2 \ln|b-1| \right) - 2 \ln 2 + \frac{1}{2} + 2 \ln|1| = \lim_{b \rightarrow \infty} 2 \ln \left| \frac{b}{b-1} \right| - 2 \ln 2 + \frac{1}{2} = \lim_{b \rightarrow \infty} 2 \ln \left| \frac{1}{1-\frac{1}{b}} \right| - 2 \ln 2 + \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2} - 2 \ln 2 \end{aligned}$$

סעיף ב

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx \quad \text{נחשב תחילה את האינטגרל הלא מסוים} \quad \int_0^{\infty} x e^{-x} dx$$

נחשב בעזרת אינטגרציה בחלקים.

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} \quad \begin{array}{l} v = -e^{-x} \quad u = x \\ v' = e^{-x} \quad u' = 1 \end{array}$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \left[-x e^{-x} - e^{-x} \right]_0^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-b e^{-b} - e^{-b} + 1 \right] = 1$$

סעיף ג

$$\int_0^{\infty} \cos x dx = \left[\sin x \right]_0^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} \sin b$$

לא קיים והאינטגרל

מתבדר.

סעיף ז

$$\int_{-\infty}^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_{e^b}^e \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{b \rightarrow -\infty} [\arctg(t)]_{e^b}^e = \arctg(e) - \lim_{b \rightarrow -\infty} \arctg(e^b) = \arctg(e)$$

$\begin{matrix} dt=e^x dx \\ x=1 \rightarrow t=e \\ x=b \rightarrow t=e^b \end{matrix}$

סעיף ה

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \sin x^2 dx \quad \text{נחשב את האינטגרל הלא מסוים}$$

$$\int x \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t = -\frac{1}{2} \cos x^2 \quad . dt = 2x dx \leftarrow t = x^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \sin x^2 dx = \int_{-\infty}^0 x \sin x^2 dx + \int_0^{\infty} x \sin x^2 dx$$

מספיק להראות ש $\int_0^{\infty} x \sin x^2 dx$ מתבדר כדי להראות שכל האינטגרל מתבדר.

$$\int_0^{\infty} x \sin x^2 dx = \left[-\frac{1}{2} \cos x^2 \right]_0^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} \cos x^2 + \frac{1}{2} \right]$$

סעיף ו

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4-1}} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b 4x^3 dx \cdot (x^4-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{(x^4-1)^{-\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}} \right]_2^b \\ &= \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow \infty} 2\sqrt{b^2-1} - 2\sqrt{15} = \infty \end{aligned}$$

\Downarrow
 מתבדר

שאלה 2

בדוק בעזרת מבחן ההשוואה הראשון האם האינטגרלים הבאים מתכנסים:

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \quad \text{ד.} \quad \int_1^{\infty} \frac{2 + \sin x}{x} dx \quad \text{ג.} \quad \int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x \ln^2(x+1)} dx \quad \text{ב.} \quad \int_1^{\infty} x^{-x} dx \quad \text{א.}$$

פתרון שאלה 2

הערה: שימו לב: בכל האינטגרליים $\int_a^{\infty} f(x) dx$ מתקיים התנאי $f(x) \geq 0$ לכל $a \leq x$.

סעיף א

$$\int_1^{\infty} x^{-x} dx = \int_1^2 x^{-x} dx + \int_2^{\infty} x^{-x} dx$$

מתכנס.

לכל $2 \leq x$ מתקיים $\frac{1}{x^x} \leq \frac{1}{x^2}$. מכיוון ש $\int_2^{\infty} x^{-2} dx$ מתכנס נקבל ממבחן ההשוואה הראשון שגם האינטגרל $\int_2^{\infty} x^{-x} dx$ מתכנס.

סעיף ב

$\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x \ln^2(x+1)} dx$
 לכל $1 \leq x$ מתקיים $\arctan x \leq \frac{\pi}{2}$ ולכן $\frac{\arctan x}{x \ln^2(x+1)} \leq \frac{\pi}{2(x+1)\ln^2(x+1)}$ לכל $1 \leq x$.
 ממבחן ההשוואה הראשון מספיק להראות ש $\int_1^{\infty} \frac{\pi}{2(x+1)\ln^2(x+1)} dx$ מתכנס.
 מכיוון ש $\int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)} dx = \frac{\pi}{2} \int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)} dx$ מספיק להוכיח ש
 $\int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)} dx$ מתכנס. נציב $t = \ln(x+1) \Leftrightarrow dt = \frac{dx}{x+1}$
 מכיוון ש $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x+1) = \infty$ נקבל ש $\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = \int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)} dx$
 מכיוון ש $\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$ מתכנס נקבל ש $\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x \ln^2(x+1)} dx$ מתכנס.

סעיף ג

$\int_1^{\infty} \frac{2 + \sin x}{x} dx$ מכיוון ש $-1 \leq \sin x$ נקבל ש $1 \leq 2 + \sin x$ $\Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{2 + \sin x}{x}$
 מכיוון ש $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ מתבדר נקבל גם ש $\int_1^{\infty} \frac{2 + \sin x}{x} dx$ מתבדר.

סעיף ד

$\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ מכיוון ש $\sin^2 x \leq 1$ נקבל ש $\frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$
 מכיוון ש $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ מתכנס גם $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ מתכנס.

שאלה 3

בדוק בעזרת מבחן המנה האם האינטגרלים הבאים מתכנסים:

א. $\int_2^{\infty} \frac{x+7}{\sqrt{x^5-3x}} dx$ ב. $\int_1^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ ג. $\int_1^{\infty} \frac{x^4+1}{x^5+3x^2-6} dx$ ד. $\int_1^{\infty} (\ln(1+e^x) - x) dx$

פתרון שאלה 3

סעיף א

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{\sqrt{x^5-3x}} : \frac{1}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2\sqrt{x}+7}{\sqrt{x^5-3x}} = 1$$

מתכנס. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

סעיף ב

נשים לב תחילה שעבור $0 \leq \alpha \leq \pi$ ו $0 \leq \sin \alpha$ ולכן עבור $1 \leq x$ נקבל ש $0 \leq \sin \frac{1}{x}$.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \text{ מתבדר. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1 \text{ ומבחן המנה } \int_1^{\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \text{ מתבדר.}$$

סעיף ג

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \text{ מתבדר. נשים לב ש } \int_1^{\infty} \frac{x^4 + 1}{x^5 + 3x^2 - 6} dx$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^5 + 3x^2 - 6} : \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x}{x^5 + 3x^2 - 6} = 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x^4 + 1}{x^5 + 3x^2 - 6} dx \text{ מתבדר.}$$

סעיף ד

$$\ln(1 + e^x) - x = \ln(1 + e^x) - \ln e^x = \ln \frac{1 + e^x}{e^x} = \ln(e^{-x} + 1) \text{ נשים לב ש } \int_1^{\infty} (\ln(1 + e^x) - x) dx$$

$$\text{ראינו ש } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ מתכנס. נחשב את הגבול } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{-x} + 1)}{\frac{1}{x^2}} \text{ מכלל לופיטל נקבל}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{-x} + 1)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 e^{-x}}{2(e^{-x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2(1 + e^x)} = 0$$

$$\int_1^{\infty} (\ln(1 + e^x) - x) dx \text{ מתכנס גם } \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ שמהתכנסות}$$

שאלה 4

$$\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \text{ עבור } a > 0 \text{ מתכנס לכל } \alpha > 0.$$

פתרון

$$\text{נסמן: } f(x) = \sin x \text{ ו } g(x) = \frac{1}{x^\alpha}.$$

$f(x)$ ו $g(x)$ אינטגרביליות בקטע $[a, b]$ לכל $b > a$ (כי נתון $a > 0$).

$$\left| \int_a^{\infty} f(x) dx \right| = \left| \int_a^{\infty} \sin x dx \right| = \left| \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \sin x dx \right| = \left| \lim_{b \rightarrow \infty} (-\cos x) \Big|_a^b \right| = \left| -\lim_{b \rightarrow \infty} \cos b + \cos a \right| \leq 2$$

$$g(x) = \frac{1}{x^\alpha} \text{ היא פונקציה מונוטונית ומקיימת } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0, \alpha > 0.$$

$$\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \text{ מתכנס. לפי מבחן דריכלה } \Leftarrow$$

שאלה 5

הוכח או הפוך: אם $\int_1^{\infty} f(x) dx$ מתכנס, אזי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

פתרון

הדוגמה הנ"ל מראה שאם $\int_1^{\infty} f(x) dx$ מתכנס, אזי לא בהכרח $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

נסתכל על הפונקציה $f(x) = \sin(x^2)$.

הגבול לא קיים $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x^2) \rightarrow$

נסתכל על $\int_1^{\infty} \sin(x^2) dx$

$$(*) \int \sin(x^2) dx \stackrel{\substack{x^2=t \\ x=\sqrt{t} \\ dx=\frac{1}{2\sqrt{t}}dt}}{=} \int \sin t \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{\sin t}{t^{\frac{1}{2}}} dt \rightarrow \text{לפי שאלה 4 האינטגרל מתכנס}$$

שאלה 6

הוכח כי $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2 \cdot (\sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3)^4} < 1 + \frac{\pi}{4}$

פתרון

תחילה נשים לב ש

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2 \cdot (\sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3)^4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2 \cdot (\sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3)^4} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2 \cdot (\sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3)^4}$$

מכיוון ש $x^2 \cdot (\sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3)^4 \geq 0$ לכל x נקבל ש

$$1 + x^2 \cdot (\sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3)^4 \geq 1$$

ולכן $\frac{1}{1+x^2 \cdot (\sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3)^4} \leq 1$ ואז

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2 \cdot (\sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3)^4} \leq \int_0^1 dx = 1$$

מכיוון ש $\sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3 > 1$

(ניתן לקבל זאת ע"י חקירת הפונקציה $f(x) = \sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3$ נקבל ש

$$1 + x^2 \cdot (\sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3)^4 > 1 + x^2$$

ואז $\frac{1}{1+x^2 \cdot (\sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3)^4} < \frac{1}{1+x^2}$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2 \cdot (\sin(11x) + \sqrt{3} \cdot \cos(11x) + 3)^4} < \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_1^{\infty} = \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctan b - \arctan 1] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$