פתרון תרגיל 5

תרגיל 1

סעיף א

נוכיח ש - $(j+k)!\geq j!k!$

$$(j+k)!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot j\cdot(j+1)\cdot\ldots(j+k)\geq 1\cdot 2\ldots\cdot j\cdot 1\cdot\ldots\cdot k=j!k!$$

ולכן

$$\binom{n}{j+k}=\frac{n!}{(j+k)!(n-j-k)!}\leq\frac{n!}{j!k!(n-j-k)!}=\frac{n!(n-j)!}{j!(n-j!)k!(n-j-k)!}=\binom{n}{j}\binom{n-j}{k}$$

סעיף ב

$j=0\vee k=0$

תרגיל 2

$$\frac{(2n)!}{2^n n!}=\frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots 2\cdot 1}{2^n n!}=\frac{2\cdot n\cdot(2n-1)\cdot 2(n-1)(2n-3)\cdot 2(n-2)\cdots 2\cdot 1}{2^n n!}=$$
$$=\frac{2^n n\cdot(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot(2n-1)(2n-3)\cdots}{2^n n!}=\frac{2^n n!\cdot k}{2^n n!}$$

תרגיל 3

סעיף א

לכל הטלת קובייה יש 6 אפשרויות מכיוון שמטילים אותה n נקבל 6^n אפשרויות.

סעיף ב

נסמן את המקרה שבו התוצאות $\{1,2,3\}$ בלבד מתקבלות ב A_1 .

מכיוון ש מס' אפשרויות לבחור 3 תוצאות שונות מתוך 6 שווה ל- $6=\binom{6}{3}$ נקבל

שישה מקרים שמספר האפשרויות עבור כל אחד מהם שווה והחיתוך ביניהם ריק, ולכן מספיק לחשב את A_1 ולהכפיל פי 6.

חישוב A_1

מספר האפשרויות שרק שלושת התוצאות $\{1,2,3\}$ יתקבלו (כולל האפשרויות שרק שתיים מהם יופיעו או רק אחד מהם יופיע) הוא 3^n. נסמן מקרה זה ב B

נסמן ב B_1 את המקרה שבו התוצאות $\{1,2\}$ יתקבלו (כולל האפשרות שרק אחד מהם יופיע).

נסמן ב B_2 את המקרה שבו התוצאות $\{1,3\}$ יתקבלו (כולל האפשרות שרק אחד מהם יופיע).
נסמן ב B_3 את המקרה שבו התוצאות $\{1,3\}$ יתקבלו (כולל האפשרות שרק אחד מהם יופיע).

ואז $|A_1| = |B| - |B_1 \cup B_2 \cup B_3| = |B| - \left(\sum_{i=1}^{3} |B_i| - \sum_{i<j} |B_i \cap B_j| + |B_1 \cap B_2 \cap B_3| \right)$

נשים לב שלכל i, j $|B_i \cap B_j| = 1$ ו $|B_i| = 2^n$ ו $|B_1 \cap B_2 \cap B_3| = 0$

ולכן סה"כ נקבל $|A_1| = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3$.

וסה"כ תשובה סופית $\sum_{i=1}^{6} |A_i| = 6\left(3^n - 3 \cdot 2^n + 3\right)$

סעיף ג

נסמן ב- A_i את קבוצת המספרים, ש- i לא מופיע (A_1 - זה כל האפשרויות, שלא יצא 1 בזריקת n קוביות), אז $|A_i| = 5^n$. נסמן ב- $A_i \cap A_j$ את קבוצת כל המספרים ש- A_i לא מופיע וגם A_j לא מופיע, אז $|A_i \cap A_j| = 4^n$. נמשיך עם הסימון עד החיתוך של 5 קבוצות (מצב, שהתקבלו 5 תוצאות שונות מתוך 6 עבור זריקה של n קוביות). כל אחת מהתוצאות תתקבל לפחות פעם אחת-זאת אומרת לא יתכן מצב, שהתקבלו 5 תוצאות שונות, שזה A_i, וגם לא יתכן מצב, שהתקבלו רק 4 תוצאות שונות, שזה $A_i \cap A_j$ וגם לא יתכן מצב כזה עבור 3,2,1 תוצאות שונות.

מספר פתרונות לשאלה – זה סה"כ אפשרויות פחות מה, שלא מקיים את תנאי השאלה וזה:

$$6^n - 6|A_i| + \binom{6}{2}|A_i \cap A_j| - ... = 6^n - 6 \cdot 5^n + 15 \cdot 4^n - 20 \cdot 3^n + 15 \cdot 2^n - 6$$

תרגיל 4

סעיף א

נסמן ב A את בחירה של 5 קלפים מתוך החפיסה.
נסמן ב A_1 את המקרה שבו לא בחרנו תלתן, A_2 שלא נבחר יהלום, A_3 שלא נבחר לב ו A_4 שלא נבחר לב.

ולכן יש לחשב את $|A| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$

נשים לב שלכל i נקבל ש $|A_i| = \binom{39}{5}$ ולכל $i \neq j$ נקבל ש $|A_i \cap A_j| = \binom{26}{5}$

וכו...
ולכן התשובה

$$\binom{52}{5} - 4\binom{39}{5} + \binom{4}{2}\binom{26}{5} - \binom{4}{3}\binom{13}{5}$$

סעיף ב

$A_1 = 5000$ -מספרים הזוגיים($\frac{10000}{2} = 5000$)

$A_2 = 1428$ - מספרים שמתחלקים ב-7($\frac{10000}{7} = 1428$)

$A_3 = 100$ - ריבועים שלמים.

$A_1 \cap A_2 = 714$

$A_3 \cap A_2 = 14$

$A_1 \cap A_3 = 50$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 7$

פותרים את השאלה על ידי כלל דה מורגן:

$$A_1^{'} \cap A_2^{'} \cap A_3^{'} = (A_1 \cup A_2 \cup A_3)^{'} = U - (A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_3 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

1000-(5000+1428+100-714-14-5-+7)=4243

סעיף ג

להגדיר קבוצות כמו בסעיף קודם ולהשתמש בכלל דה-מורגן:

A_1 - מספרים, שמתחלקים ב-3

A_2 - מספרים, שמתחלקים ב-4

A_3 - מספרים, שמתחלקים ב-5

3000-(1000+750+600-250-200-150+50)=1200

סעיף ד

מתחלק בדיוק באחד מהמספרים 3, 4 או 5 $\Leftarrow$ מתחלק רק ב-3 או רק ב-4 או רק ב-5,
לכן אם נגדיר A_1 - מספרים, שמתחלקים ב-3, A_2 - מספרים, שמתחלקים ב-4, A_3 -
מספרים, שמתחלקים ב-5

על מנת לפתור נשתמש בנוסחא:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - 2|A_1 \cap A_2| - 2|A_3 \cap A_2| - 2|A_1 \cap A_3| + 3|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

333+250+200-2*83-2*50-2*66+3*16=433

סעיף ה

אותו הדבר רק מספרים שונים

333+250+200-2*83-2*50-2*67+3*17=434

סעיף ו

$A_1 \cap A_2$ מספרים, שמתחלקים ב-7 וב-8 הם המספרים, שמתחלקים ב-56 ויש $\left\lfloor \frac{1001}{56} \right\rfloor = 17$ כאלה.

$A_1 \cap A_3$ מספרים, שמתחלקים ב-7 וב-9 הם המספרים, שמתחלקים ב-63 ויש 15 כאלה.

$A_3 \cap A_2$ מספרים, שמתחלקים ב-8 וב-9 הם המספרים, שמתחלקים ב-72 ויש 13 כאלה.

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$ קיים רק מספר אחד,שמתחלק ב-7 וגם 8 וגם 9 והוא 1000

$$|A_1 \cap A_2| + |A_3 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| - 3 \cdot |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 17 + 13 + 15 - 3 = 42$$

תרגיל 5

סעיף א

1. מספר פתרונות הוא לפי נוסחה :

$$D(5,10) = \binom{10+5-1}{5-1} = \frac{14!}{4!10!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 11 \cdot 7 \cdot 13 = 1001$$

2. יש למצוא את מספר הפתרונות למשוואה $a+b+c+d+e=10$ כאשר a מספר אי זוגי.

דרך א

מכיוון שכל המספרים גדולים ממש מאפס האפשרויות עבור a הם $1,3,5$

נפתור עבור $a=1$

נציב $b=b'+1, c=c'+1, d=d'+1, e=e'+1$ ונקבל

$b'+c'+d'+e'=5$ מספר האפשרויות למקרה זה $\binom{8}{5} = 56$.

נפתור עבור $a=3$

$b'+c'+d'+e'=3$ מספר האפשרויות למקרה זה $\binom{6}{3} = 20$

נפתור עבור $a=5$

$b'+c'+d'+e'=1$ מספר האפשרויות למקרה זה $\binom{4}{1} = 4$

ולכן הפתרון הוא 80.

דרך ב:

נציב תחילה $b=b'+1, c=c'+1, d=d'+1, e=e'+1, a=a'+1$

ונקבל $a'+b'+c'+d'+e'=5$ סה"כ האפשרויות למקרה זה $126=\binom{9}{5}$.

נפתור עבור $a=2$ ונקבל

$b'+c'+d'+e'=4$ סה"כ האפשרויות למקרה זה $35=\binom{7}{4}$

נפתור עבור $a=4$ ונקבל

$b'+c'+d'+e'=2$ סה"כ האפשרויות למקרה זה $10=\binom{5}{2}$

נפתור עבור $a=6$ ונקבל

$b'+c'+d'+e'=0$ סה"כ האפשרויות למקרה זה הוא 1

כעת $126-35-10-1=80$

סעיף ג

אם נגדיר $\boldsymbol{y_i=x_i-1}$, אז מספר פתרונות למשוואה $\boldsymbol{x_1+x_2+x_3+x_4=15}$ כאשר $\boldsymbol{x_i\ge 1}$ הוא אותו מספר כמו מספר הפתרונות למשוואה $\boldsymbol{y_1+y_2+y_3+y_4=11}$, כאשר $\boldsymbol{y_i\ge 0}$ ועל פי נוסחה זה $\binom{14}{11}=\frac{14!}{3!\cdot 11!}$.

מספר אפשרויות לפתור את המשוואה, כאשר $x_i\ge 8$

מכיוון שרק x_i יחיד מקיים $\boldsymbol{x_i\ge 8}$ ושאר $\boldsymbol{x_i\ge 1}$. נגדיר $y_1=x_1-8$ ו- $\boldsymbol{y_i=x_i-1}$ עבור $\boldsymbol{2\le i\le 4}$ ואז יש למצוא את מספר הפתרונות למשוואה $y_1+y_2+y_3+y_4=4$ כאשר $\boldsymbol{y_i\ge 0}$ ונקבל $\binom{7}{3}=\frac{7!}{4!\cdot 3!}$.

בגלל שיש 4 אפשרויות ל-$x_i\ge 8$ וכן רק x_i יחיד מקיים $\boldsymbol{x_i\ge 8}$ נקבל

$$4\cdot\binom{7}{3}=4\cdot\frac{7!}{4!\cdot 3!}$$

התוצאה הסופית עבור $\boldsymbol{1\le x_i\le 7}$ היא: $\binom{14}{11}-4\binom{7}{3}=224$

סעיף ד

בהתחלה נחליף משתנים לפי חסם התחתון אזי:

$$y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2, y_3 = x_3 + 2, y_4 = x_4 - 6$$

לכן אחרי ההצבה בתוך המשוואה מקורית נקבל:

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 20$, כך ש

$0 \le y_1 \le 5, 0 \le y_2 \le 8, 0 \le y_3 \le 5, 0 \le y_4 \le 4$

נסמן A_1, A_2, A_3, A_4 קבוצת הפתרונות בהם $6 \le y_1, 9 \le y_2, 6 \le y_3, 5 \le y_4$ בהתאמה. אזי :

$$|A_1| = \binom{14+4-1}{4-1} = \binom{17}{3}$$

$$|A_2| = \binom{11+4-1}{4-1} = \binom{14}{3}$$

$$|A_3| = \binom{14+4-1}{4-1} = \binom{17}{3}$$

$$|A_4| = \binom{15+4-1}{4-1} = \binom{18}{3}$$

נחשב כעת את החיתוכים בין הקבוצות:

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3}$$

$$|A_1 \cap A_3| = \binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3}$$

$$|A_1 \cap A_4| = \binom{9+4-1}{4-1} = \binom{12}{3}$$

$$|A_2 \cap A_3| = \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3}$$

$$|A_2 \cap A_4| = \binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3}$$

$$|A_3 \cap A_4| = \binom{9+4-1}{4-1} = \binom{12}{3}$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 1$$

$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 20$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$$

אזי לפי כלל הדחה והכלה $\left|S\setminus\bigcup_{i=1}^{4}A_i\right|$ ובסה"כ: התשובה הסופית היא 10.

תרגיל 6

יש לבחור k מספרים מהקבוצה $\{1,2,...,n\}$ כך שלא יהיו שני מספרים עוקבים.
נתבונן בקבוצה $\{a_1,a_2,a_3,...,a_k\}$ שהיא תת קבוצה של הקבוצה $\{1,2,...,n\}$
ונניח שאין שני מספרים עוקבים. אנו נרצה לדעת כמה אפשרויות קיימות למקרה
זה. נסדר את המספרים בקבוצה לפי סדר עולה ז"א $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_k$
נשים לב ש $a_k \le n$
ולכל i נקבל ש $a_{i+1} - a_i \ge 2$ וכן $a_1 \ge 1$. סה"כ נקבל

$$n \ge a_k = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ...(a_{k-1} - a_{k-2}) + (a_k - a_{k-1})$$

נסמן $x_1 = a_1, x_2 = a_2 - a_1, x_3 = a_3 - a_2, ..., x_k = a_k - a_{k-1}$
ולכן הבעיה שקולה למספר האפשרויות לפתור את המשוואה $\sum_{i=1}^{k} x_i \le n$ באשר
$x_1 \ge 1$ ולכל $i \ne 1$ $x_i \ge 2$ נציב $y_1 = x_1 - 1$ ולכל $i \ne 1$ $y_i = x_i - 2$ ונקבל
$\sum_{i=1}^{k} y_i \le n-1-2(k-1) = n-2k+1$ באשר $y_i \ge 0$ על פי הנוסחה
מהתרגול נקבל שמספר האפרויות לפתרון המשוואה הוא

$$\binom{n-2k+1+k}{k} = \binom{n-k+1}{k}$$

תרגיל 7

נסמן מספר התחומים ב-f(n). אזי אפשר לראות n ישרים כמו
n-1 ישרים ועוד ישר אחד נוסף. ישר נוסף חדש הזה מפצל כל תחום שעובר בו ל-2.
יש n תחומים כאלה כאשר התחום בו עובר הישר מתחלף בכל אחד מן הנקודות
החיתוך שלו עם n-1 ישרים ישנים. אזי נסחה רקורסיבית היא:

$$f(n) = f(n-1)+n$$

ותנאי התחלה הוא: f(0) = 1. אזי באופן כללי:

$$f(n) = f(n-1)+n = f(n-2)+(n-1)+n = f(n-3)+(n-2)+(n-1)+n = \ldots =$$

$$f(0)+1+2+3+\ldots+n = 1+\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

תרגיל 8

א)
$$f(n)=5f(n-1)-6f(n-2),\ f(n)=x^n,\ f(n-1)=x^{n-1},\ f(n-2)=x^{n-2};$$
$$x^n-5x^{n-1}+6x^{n-2}=0\,|\,x^{n-2};$$
$$x^2-5x+6=0;$$
$$(x-2)(x-3)=0;$$
$$f(n)=a_1\cdot 2^n+a_2\cdot 3^n;$$
$$f(0)=a_1+a_2=1\Rightarrow a_1=1-a_2;$$
$$f(1)=2\cdot(1-a_2)+3\cdot a_2=2-2\cdot a_2+3\cdot a_2=2-3\cdot a_2=2\Rightarrow a_2=0\Rightarrow a_1=1;$$
$$f(n)=2^n;$$

ב)
$$f(n)=4f(n-1)-3f(n-2),\ f(n)=x^n,\ f(n-1)=x^{n-1},\ f(n-2)=x^{n-2};$$
$$x^n-4x^{n-1}+3x^{n-2}=0\,|\,x^{n-2};$$
$$x^2-4x+3=0;$$
$$(x-1)(x-3)=0;$$
$$f(n)=a_1+a_2\cdot 3^n;$$
$$f(0)=a_1+a_2=2\Rightarrow a_1=2-a_2;$$
$$f(1)=2-a_2+3\cdot a_2=2+2\cdot a_2=0\Rightarrow a_2=-1\Rightarrow a_1=3;$$
$$f(n)=3-3^n;$$

תרגיל 9

ניתן להפריד את הבעיה לשני מקרים באופן רקורסיבי:
נתונה התמורה $(1234.......n)$ ונרצה לבדוק את כל האפשרויות לסדר את התמורה מחדש כך שכל מספר יכול לזוז מקום אחד לכל היותר ימינה או שמאלה.
כלומר: א.אם 1 יזוז מקום אחד ימינה אזי בהכרח 2 יזוז מקום אחד שמאלה (למקומו הקודם של 1) אחרת 2 יזוז שמאלה וכך גם 3 עד שנגיע ל-n שנצטרך להציב אותו במקום הראשון משמאל בניגוד לדרישות השאלה.כלומר 1 ו-2 התחלפו ונותר לנו לסדר $n-2$ מקומות כלומר ניתן להתייחס לזאת כבעיית a_{n-2}.

ב. אם 1 ישאר במקומו אז נותר לנו לסדר $n-1$ מקומות כלומר ניתן להתייחס לזאת כבעיית a_{n-1}.

לסיכום נקבל $(n\ge 2)$ $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ כאשר $a_1=1, a_0=1$.