מרצה: פרופסור ראובן כהן

חדר: 215

טלפון: 050-5217779

דוא"ל: reuven@math.biu.ac.il

אתר: u.math.biu.ac.il/~reuven

חומר נוסף:
- אתר של פרופסור מיכאל כץ: http://u.math.biu.ac.il/~katzmik/88-526.html
- חוברת לימוד: גיאומטריה דיפרנציאלית \ ברק שושני
- ספר: מבוא לגיאומטריה דיפרנציאלית \ פרופסור מיכאל פרבר

הגדרה - מרחב

מרחב עם שני מימדים זה מישור - $\mathbb{R}^2$
מרחב עם שלושה מימדים זה מרחב - $\mathbb{R}^3$
מבחינה של אלגברה לינארית, זה מתאר את כל המרחבים מעל $\mathbb{R}$ עם 2 או 3 מימדים, אבל מבחינה גיאומטרית זה לא מספיק. לכן נשתמש במרחבים אוקלידיים: E_2 וE_3 - שהם $\mathbb{R}^2$ ו$\mathbb{R}^3$ שמוגדרת עליהם מכפלה סקלרית(ולכן גם נורמה): $\|v\| = \langle v, v \rangle$.

הגדרה - כדור

כדור היחידה הוא $S^2 = \left\{ (x,y,z) \middle| x^2+y^2+z^2=1 \right\}$. הפתרונות של המשוואה הזו מייצגים את הפנים של כדור. המרחב הוא תלת-מימדי אבל המשטח של פני הכדור הוא דו-מימדי, ומכאן ה"2".
קו ישר על פני הכדור - כלומר הקו הקצר ביותר המוכל בכדור ומחבר שתי נקודות - הוא בעצם חלק ממעגל גדול שחותך את מרכז הכדור. לכן כל זוג קווים מקבילים על כדור נחתכים בשתי נקודות.

הגדרה - עקום ז'ורדן

עקום ז'ורדן הוא קו סגור ב$\mathbb{R}^2$ שאינו חותך את עצמו.
נסמן בL את אורך העקום, ובA את השטח הכלוא בתוך העקום.

משפט אי השוויון האיזו-פרימטרי

לכל עקום ז'ורדן ב$\mathbb{R}^2$ מתקיים:

$$\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 - \frac{A}{\pi} \geq 0$$

אינטואיציה

מכל הצורות שאפשר לצייר במישור עם אורך קו נתון, הצורה שכולאת הכי הרבה שטח היא המעגל. עבור מעגל עם רדיוס R מתקיים:

$$\begin{array}{l} L = 2\pi R \\ A = \pi R^2 \end{array} \implies \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 - \frac{A}{\pi} = \frac{\cancel{4\pi^2} R^2}{\cancel{4\pi^2}} - \frac{\cancel{\pi} R^2}{\cancel{\pi}} = \cancel{R^2} - \cancel{R^2} = 0$$

סימון

אם $v, u, w \in \mathbb{R}^n$ וקטורים במרחב, נסמן את הוקטור כולו ב $v^i = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$.

הגדרה - פונקציונאל לינארי

בדרך כלל יש לנו מכפלה סקאלרית בין שני וקטורים, אבל גם אם אין - אפשר להסתכל על פונקציונאלים $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

פונקציונאל לינארי הוא פונקציונאל $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ המקיים לכל $\begin{array}{c} u, v \in \mathbb{R}^n \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{array}$:

$$f(\alpha v + \beta u) = \alpha f(v) + \beta f(u)$$

משפט ריס

הפונקציונאלים הלינאריים איזומורפיים למרחב הוקטורי.

כלומר הפונקציונאלים הם גם מרחב וקטורי $\mathbb{R}^n$, ולכן ניתן לכתוב $f_i = f(e_i)$ כאשר e_i בסיס אורתונורמלי[1] של $\mathbb{R}^n$.

איך נראית הפעולה של f על וקטור כללי?

$$f(v) = f\left(\sum_i v^i e_i\right) = \sum_i v^i f(e_i) = \sum_i v^i f_i$$

הערה

בשביל להגדיר אורתונורמליות צריך מכפלה סקלרית, אבל גם אם לא מוגדרת מכפלה סקלרית אפשר להגדיר פונקציואנליים לינאריים.

[1] בד"כ מדובר על הבסיס הסטנדרטי.

סימון מקובל+הגדרה

לא במקרה אצל v^i האינדקס למעלה ואצל f_i האינדקס למטה.

- וקטורים עם אינדקס למטה(פונקציואנלים) נקראים קו־וקטורים או "וקטורים קו־ווריאנטים".
- וקטורים עם אינדקס למעלה נקראים סתם וקטורים, או לפעמים "וקטורים קונטרה־ווריאנטים".

הסכם הסיכום של איינשטיין(Einstein Summation Convention)

בכל ביטוי שמופיעה בו מכפלה של רב־איבר עם אינדקס מסויים למעלה ואותו האינדקס למטה, אזי סוכמים על אותו האינדקס.

לכן למשל אפשר לכתוב $v^i f_i$ במקום $\sum\limits_i v^i f_i$.

תבניות בי־לינאריות

תבנית בי־לינארית היא תבנית שפועלת על שתי וקטורים ומחזירה סקלר: $B:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

אפשר לחשוב על זה בתור מטריצה שכופלים בוקטורים ע"י $\begin{pmatrix}* \\ * \\ *\end{pmatrix}\begin{pmatrix}* & * & * \\ * & * & * \\ * & * & *\end{pmatrix}\begin{pmatrix}* & * & *\end{pmatrix}$,

אבל צריך להיזהר ־ כי אין לנו דרך טבעית לעבור ממרחב וקטורי לוקטורים ומטריצות.

עם הסכם הסיכום של איינשטיין אפשר לכתוב:

$$B\left(v,u\right)=B_{ij}v^iu^j$$

ואם מסתכלים על זה בתור וקטורים ומטריצות:

$$v=\begin{pmatrix}v^1\\ v^2\end{pmatrix},u=\begin{pmatrix}u^1\\ u^2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$$

אז אפשר לכתוב

$$B\left(v,u\right)=u^tBv=\begin{pmatrix}u^1 & u^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\ v^2\end{pmatrix}=B_{11}v^1u^1+B_{12}u^2v^1+B_{21}u^1v^2+B_{22}u^2v^2$$

הצורה הריבועית

$$Q\left(v\right)=B\left(v,v\right)=B_{ij}v^iv^j$$

אפשר לשחזר את הצורה הבי־לינארית מתוך הצורה הריבועית:

$$B\left(v,u\right)=\frac{1}{4}\left(Q\left(v+u\right)-Q\left(v-u\right)\right)$$

אבל רק בתנאי שB סימטרית.

הוכחה

$$Q\left(v+u\right)=B\left(v+u,v+u\right)=B\left(v,v\right)+B\left(v,u\right)+B\left(u,v\right)+B\left(u,u\right)$$

$$Q\left(v-u\right)=B\left(v-u,v-u\right)=B\left(v,v\right)-B\left(v,u\right)+B\left(u,v\right)+B\left(u,u\right)$$

$$Q\left(v+u\right)+Q\left(v-u\right)=2B\left(u,v\right)+2B\left(v,u\right)$$

ואם התבנית סימטרית זה שווה ל$4B\left(v,u\right)$

הגדרה - מטריצה

הערה: בקורס הזה נתעניים רק במטריצות ריבועיות

מטריצה היא מיפוי $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. למטריצה יש אינדקס אחד למעלה ואינדקס אחד למטה, ואפשר לרשום $A^j{}_i v^i=u^j$. צריך לשים לב לרווחים - יש הבדל בין $A^j{}_i$ ל$A_i{}^j$ - יש חשיבות איזה אינדקס ראשון ואיזה שני. בעיקרון מקובל שהאינדקס השני יהיה מוכפל בווקטור שאחריו.

בד"כ האינדקס הראשון מייצג שורה והאינדקס השני מייצג עמודה - זה חשוב בעיקר כשמכפילים בווקטורים.

סימון לtrace:

$$A^i{}_i\equiv\mathrm{tr}A$$

סימטריזציה ואנטי־סימטריזציה

עבור B_{ij}(נשים לב - עכשיו מדברים על תבנית בי־לינארית, לא על מטריצה, ולכן שני האינדקסים באותו גובה) החלק הסימטרי של B(מסומן $B_{\{ij\}}$) הוא

$$B_{\{ij\}}=S:=\frac{1}{2}\left(B^t+B\right)\implies S_{ij}=\frac{1}{2}\left(B_{ij}+B_{ji}\right)$$

החלק האנטי סימטרי של B(מסומן $B_{[ij]}$) הוא

$$B_{[ij]}=A=\frac{1}{2}\left(B-B^t\right)\qquad A_{ij}=\frac{1}{2}\left(B_{ij}-B_{ji}\right)$$

הערה

הסימון $B_{\{\dots\}}$ אומר שסוכמים את כל הפרמוטציות(תמורות) של האינדקסים ומחלקים במספר הפרמוטציות:

$$B_{\{i_1 \dots i_k\}} = \frac{1}{k!} \sum_{\pi} B_{\pi(i_1 \dots i_k)}$$

עבור $B_{[\dots]}$ מתחשבים גם בסימן של כל פרמוטציה:

$$B_{[i_1 \dots i_k]} = \frac{1}{k!} \sum_{\pi} (-1)^{\mathrm{sign}(\pi)} B_{\pi(i_1 \dots i_k)}$$

לדוגמה:

$$B_{\{ijk\}} = \frac{1}{6} \left(B_{ijk} + B_{jik} + B_{jki} + B_{kji} + B_{kij} + B_{ikj}\right)$$

$$B_{[ijk]} = \frac{1}{6} \left(B_{ijk} - B_{jik} + B_{jki} - B_{kji} + B_{kij} - B_{ikj}\right)$$

סימון מקובל

הסימון הזה תופש גם כשמדובר באינדקסים של איברים שונים.
לדוגמה - אם $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$, אז מסמנים:

$$c_{[ij]} = \sum_k b_{k[j} a_{i]k} = \sum_k \frac{1}{2} \left(b_{kj} a_{ik} - b_{ki} a_{jk}\right)$$

דוגמה

אם

$$\begin{matrix} B^1{}_1 = 3 & B^1{}_2 = 8 \\ B^2{}_1 = -2 & B^2{}_2 = 4 \end{matrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$v^1 = 4 \qquad v^2 = -3$$

ונסמן

$$u^i = B^i{}_j v^j$$

אז

$$u^1 = \sum_j B^1{}_j u^j = B^1{}_1 v^1 + B^1{}_2 v^2 = 3 \cdot 4 + 8 \cdot (-3) = -12$$

$$u^2 = B^2{}_1 v^1 + B^2{}_2 v^2 = (-2)\cdot 4 + 4\cdot(-3) = -20$$

$$u = \begin{pmatrix} -12 \\ -20 \end{pmatrix}$$

הדלתא של קרונקר

נגדיר:

$$\delta^i{}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

זאת בעצם דרך לכתוב את מטריצה היחידה
העלה והורדה של אינדקסים

$$B_{ij} B^{jk} = \delta_i{}^k$$

מכפלה וקטורית

$$v \times u = w$$

$$v \times u = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ u^1 & u^2 & u^3 \end{vmatrix}$$

$$w^1 = v^2 u^3 - u^2 v^3$$

$$w^2 = v^3 u^1 - v^1 u^3$$

$$w^3 = v^1 u^2 - v^2 u^1$$

חשוב לשים לב שמכפלה וקטורית היא לא אינווריאנטית ביחד לבחירה של מערכת הקואורדינטות.
תכונה חשובה:

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)\, b + (a \cdot b)\, c$$

גיאומטריה אנליטית

הדבר הכי פשוט ב$\mathbb{R}^2$ הוא ישר: $ax+by+c=0$

דרך שנייה לכתוב ישר ב$\mathbb{R}^2$ היא $v+tu$ ־ כלומר $\{v+tu|t\in(-\infty,\infty)\}$ כאשר $v,u\in\mathbb{R}^2$.

את המשוואה אפשר בד"כ(כאשר $b\neq 0$) לכתוב בתור $y=\alpha x+\beta$.

אם יש שתי משוואות של קוים ישרים, ואפשר לכפול אחת מהן בקבוע ולקבל את השנייה ־ אז הן אותו קו. אם רק היחס בין a וb זהה ־ אז אלו קווים מקבילים.

לכל שתי משוואות לינאריות שאינן מיוצגות ע"י קווים מקבילים יש פתרון אחד ויחיד.

מרחב אוקלידי

במרחב אוקלידי אפשר להגדיר מרחק בין שתי נקודות, כאשר הוא מוגדר ע"י משפט פיתגורס:

$$d(p_1,p_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \qquad \begin{matrix} p_1(x_1,y_1) \\ p_2(x_2,y_2) \end{matrix}$$

תכונות:

1. $d(p_1,p_2)\geq 0$ כאשר $p_1=p_2 \iff d(p_1,p_2)=0$
2. $d(p_1,p_2)=d(p_2,p_1)$
3. $d(p_1,p_3)\leq d(p_1,p_2)+d(p_2,p_3)$

הערה

במרחבים וקטוריים כלליים, אם מסתכלים על סביבה מספיק קטנה משפט פיתגורס עובד בקירוב טוב כמו במרחב אוקלידי ־ גם אם על המרחב כולו הוא לא עובד.

מעגל

מעגל הוא אוסף הנקודות שמרחקן מנקודה מסויימת קבוע: $\{p|d(p,c)=R\}$.

אם $c(x_0,y_0)\,,p(x,y)$ אז מעגל הוא אוסף הפתרונות של המשוואה

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_{-0})^2}=R$$

או לחילופין

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

אליפסה

אליפסה היא אוסף כל הנקודות שמרחקן משני מוקדים קבוע: $\{p|d(p,c_1)+d(p,c_2)=R\}$.

אליפסה קנונית(כלומר שהמרכז שלה$\frac{c_1+c_2}{2} = (0,0)$ נמצא בראשית, והצירים שלה מקבילים לציר הx ולציר הy) ניתן לכתוב בתור אוסף הפתרונות של

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

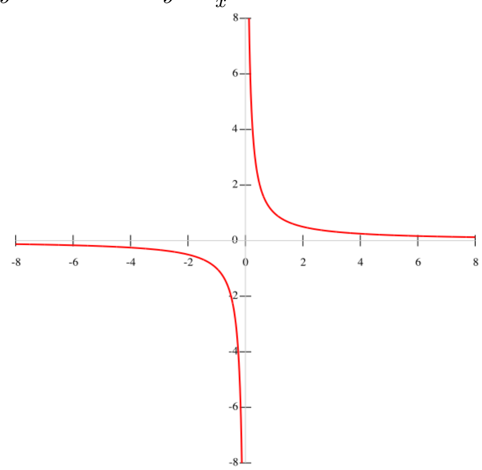
כאשר אורך ה"קוטר" המקביל לציר ה$[x]$ הוא $2a$ ואורך ה"קוטר" המקביל לציר ה$[y]$ הוא $2b$.

היפרבולה

היפרבולה היא אוסף כל הנקודות שהפרש מרחקיהן משני מוקדים קבוע: $\{p||d\left(p,c_1\right) - d\left(p,c_2\right)| = R\}$.
הצורה הקנונית(של היפרבולה המקבילה לצירים) היא

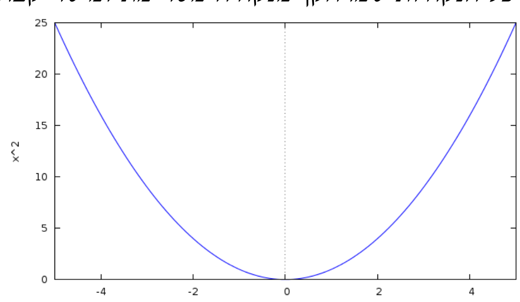
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

עוד היפרבולה מפורסמת היא $y = \frac{1}{x}$ - כלומר $xy = 1$:



פרבולה

אוסף כל הנקודות שמרחקן מנקודה מסויימת ומישר קבוע. לדוגמה $y = x^2$:



ניתן לראות את הפרבולה כמקרה קצה של אליפסה ־ וגם כמקרה קצה של היפרבולה.