פתרון תרגיל בית 3 מבוא לתורת החבורות
88-211 סמסטר א' תשע"ז

2 בינואר 2017

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך ד' כסלו ה'תשע"ז, 4.12.2016.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבע האם היא נכונה ואם לא מצא דוגמא נגדית:

1. כל חבורה צקלית היא אבלית.
2. כל חבורה אבלית היא צקלית.
3. תת חבורה הנוצרת ע"י איבר אחד היא תמיד צקלית.
4. אם $o(a) = n$ אז $a^{-1} = a^{n-1}$.

פתרון. כן, לא (למשל $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$), כן, כן.

שאלה 2. חשבו את סדר החבורות $U_{12}, U_{14}, H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.

פתרון. הסדרים הם 4,6,27.

שאלה 3. רשמו את לוחות הכפל של U_5, U_{12}.

פתרון. $U_5 = \mathbb{Z}_5^* = \mathbb{Z}_5 - \{0\}$

עבור U_{12}:

	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

שאלות להגשה

שאלה 4. פתרו את המשוואות הבאות:

1. $22x = 1$ ב$\mathbb{Z}_{117}$.
2. $-11x + 2 = 19$ ב$\mathbb{Z}_{24}$.

פתרון.

1. זה בעצם לשאול מי ההופכי של 22 בחבורה $\mathbb{Z}_{117}$. נחשב

$$\begin{aligned} 117 &= 5 \cdot 22 + 7 \\ 22 &= 3 \cdot 7 + 1 \\ 7 &= 7 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

ולכן הממ"מ הוא 1. נציב לאחור ונקבל

$$1 = 22 - 3 \cdot 7 = 22 - 3(117 - 5 \cdot 22) = 16 \cdot 22 + (-3)117$$

ולכן ההופכי שלו הוא 16.

2. נסדר את המשוואה $-11x = 17$ כעת נכפול ב-11- (שהוא הופכי של 11- לפי החישוב בהמשך) את שני האגפים ונקבל $x = -11 \cdot 17 = -19$.
החישוב שצריך לעשות הוא:

$$\begin{aligned} 24 &= (-2) \cdot (-11) + 2 \\ -11 &= (-5) \cdot 2 - 1 \\ 2 &= (-2) \cdot (-1) + 0 \end{aligned}$$

ולכן הממ"מ הוא $|-1| = 1$. נציב לאחור ונקבל:

$$1 = -(-11) - 5 \cdot 2 = -(-11) - 5(24 - 2 \cdot 11) = -11 \cdot (-11) + (-5) \cdot 24$$

ולכן ההההופכי שלו הוא 11-.

שאלה 5. תהי G חבורה ויהיו $a, b \in G$ איברים. הוכיחו כי $o(ab) = o(ba)$.
היזהרו: לא הנחנו שהחבורה אבלית!

פתרון. נסמן $o(ab) = n$. נשים לב ש $(ab)^{-1} = (ab)^{n-1}$.
כעת

$$\begin{aligned} (ba)^n &= baba \ldots ba = b(ab)(ab) \cdots (ab)a = b(ab)^{n-1}a = \\ &= b(ab)^{-1}a = bb^{-1}a^{-1}a = e \end{aligned}$$

ולכן $o(ba)|n$.
באופן סימטרי אפשר להראות ש $n|o(ba)$.

שאלה 6. תהי $G=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ חבורה אבלית. נסמן $b=a_1a_2\cdots a_n$.
הוכיחו כי $b^2=e$.

1. כיוון ש G אבלית, לא משנה סדר המכפלה של האיברים בb^2. נשים לב שבb^2 כל איבר בחבורה מופיע פעמיים. נסדר את המכפלות כך של איבר יהיה ליד ההופכי שלו $b^2=a_1a_1^{-1}a_2a_2^{-1}\cdots a_na_n^{-1}$. ואז קל לראות ש $b^2=e$.

שאלה 7. הוכיחו כי $U_{12}\ncong\mathbb{Z}_4$ (העזרו בסדר של איברים).

פתרון. אפשר לחשב שהסדר של כל איבר בU_{12} הוא מסדר לכל היותר 2 ואילו $\mathbb{Z}_4$ ציקלית ולכן יש בה איבר מסדר 4 . ולכן החבורות לא יכולות להיות איזומורפיות.

שאלה 8. בשאלה הקודמת ראינו שסדר האיברים יכול להראות לנו שחבורות הן לא איזומורפיות. כעת נראה שההפך לא נכון, יש חבורות עם איברים באותם סדרים שהן לא איזומורפיות.

1. הוכיחו כי בחבורה הבאה, הנקראת חבורת הייזנברג מעל $\mathbb{Z}_3$

$$H=\left\{\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}\mid a,b,c\in\mathbb{Z}_3\right\}\leq GL_3(\mathbb{Z}_3)$$

כל האיברים (פרט ליחידה) הם מסדר 3.

2. הוכיחו כי ב$\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$ כל האיברים (פרט ליחידה) הם מסדר 3.

3. הראו כי $H\ncong\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$.

פתרון.

1. ניקח מטריצה ונשב את הסדר שלה $\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1&3a&3b+3ac\\0&1&3c\\0&0&1\end{pmatrix}=I$.

2. חישוב פשוט.

3. החבורות לא איזומורפיות כי H איננה אבלית ואילו המכפלה $\mathbb{Z}_3^3$ כן.

שאלה 9. היזכרו בשאלה 5 של תרגיל בית 1, הוכיחו כי בחבורה מסדר זוגי מספר האיברים מסדר 2 הוא אי-זוגי.

פתרון. בתרגיל ההוא הראיתם שמספר האיברים המקיימים $x^2=e$ הוא זוגי.
נשים לב שעבור כל איבר המקיים את התכונה הזאת, מתקיים $o(x)|2$ כלומר ש $o(x)=1,2$.
איבר היחידה הוא היחיד מסדר 1 ולכן נוריד אותו מהספירה, נשארנו עם מפר אי-זוגי של איברים מסדר 2.

שאלות אתגר

את שאלות האתגר אין חובה לפתור, אך מומלץ לפחות לקרוא. אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 10. תהי G חבורה לא טריוויאלית, הוכיחו כי

$$G^{\infty} = \{(g_1, g_2, g_3, \dots) \,|\, g_i \in G,\ g_i = e \text{ except for finite number of i's}\}$$

היא חבורה (ביחס לפעולה איבר-איבר) אינסופית.
בעזרת בנייה זו, מצאו חבורה אינסופית שכל איבר בה הוא מסדר סופי.
יותר מזה: בחרו מספר $2 \leq n$ ובנו חבורה אינסופית שבה כל איבר הוא מסדר לכל היותר n.

פתרון. קל להשתכנע שזו חבורה...
הסדר אינסופי כי אם למשל $g \neq e$ אז האיברים $(e, e, \dots, e, g, e, \dots)$ עם g במקום הi הם אוסף אינסופי של איברים שונים זה מזה.
ניקח למשל את $\mathbb{Z}_2$ אז הסדר של כל איבר $(g_1, g_2, \dots)$ הוא לכל היותר 2
כי $(g_1, g_2, \dots)^2" = 2(g_1, g_2, \dots) = (2g_1, 2g_2, \dots) = (0, 0, \dots)$".

שאלה 11. תהי G חבורה סופית. הוכיחו כי מספר האיברים מסדר 3 הוא זוגי (אולי 0).
מה לגבי מספר האיברים מסדר p כאשר p מספר ראשוני אי-זוגי?

פתרון. נשים לב שאם $a \in G$ הוא מסדר 3 אזי גם $a^{-1} = a^2$ הוא מסדר 3.
ולכן את כל האיברים מסדר 3 נוכל לסדר בזוגות (a, a^2)
כלומר שיש מספר זוגי של מאיברים כאלו (אולי 0 כי אולי אין בכלל).
אם $o(a) = p$ כאשר $3 \leq p$ מספר ראשוני אזי $a, a^2, a^3, \dots, a^{p-1}$ הם $p-1$ איברים (שונים) מסדר p.
ולכן כמות האיברים מסדר p מתחלק ב$p-1$ שהוא זוגי. ולכן כמות האיברים מסדר p היא זוגית (אולי 0 כי אולי אין בכלל).

בהצלחה!