תת-חבורת הקומוטטורים

הגדרה:

תהי G חבורה. הקומוטטור של $a,b\in G$ הוא $[a,b]=aba^{-1}b^{-1}$.

$[[a,b]=e \Leftrightarrow aba^{-1}b^{-1}=e \Leftrightarrow ab=ba \Leftrightarrow a,b$ מתחלפים.$]$

תת-חבורת הקומוטטורים של G (תת-חבורת הנגזרת) היא

$$G'=\langle [a,b] \mid a,b\in G\rangle=[G,G]$$

הערות:

א. G אבלית $\Leftrightarrow G'=\{e\}$.

ב. $[a,b]^{-1}=(aba^{-1}b^{-1})^{-1}=bab^{-1}a^{-1}=[b,a]$.

כלומר הופכי של קומוטטור הוא קומוטטור.

אזהרה: מכפלת קומוטטורים אינה בהכרח קומוטטור.

ג. $H\leq G$, $H'\leq G'$.

באופן כללי אם $A\subseteq B\subseteq G$ קבוצות אז $\langle A\rangle\subseteq\langle B\rangle$.

ד. $G'\triangleleft G$. זה נובע מכך ש- $g[a,b]g^{-1}=[gag^{-1},gbg^{-1}]$

ומאינדוקציה.

בעצם מתקיים תנאי יותר חזק: אם $f:G\longrightarrow H$ הומומורפיזם,

$$f([a,b])=[f(a),f(b)]$$

הגדרה:

חבורה G היא מושלמת אם $G'=G$.

תרגיל:

תהי G חבורה פשוטה ולא אבלית. הוכיחו ש-G מושלמת.

הוכחה:

לפי התכונות של G', $G' \trianglelefteq G$. כיוון ש-G פשוטה, אין לה תת-חבורות נורמליות לא טריוויאליות, לכן $G'=\{e\}$ או $G'=G$.

G לא אבלית, לכן $G'\neq\{e\}$, ונקבל שבהכרח $G'=G$, כלומר G מושלמת.

$\square$

דוגמאות:

א. לכל $n\geq 5$, A_n פשוטה ולא אבלית, לכן $A_n'=A_n$.

ב. $\mathbb{Z}_5$ פשוטה ואבלית, ובה $\mathbb{Z}_5'=\{0\}$.

משפט:

המנה G/G', שנקראת האבליניזציה של G, היא המנה האבלית הגדולה ביותר של G. בפירוש:

א. G/G' אבלית.

ב. אם $N \trianglelefteq G$ כך ש-G/N אבלית, אז $G' \subseteq N$.

בפרט, ממשפט האיזומורפיזם השלישי, G/N היא מנה של G/G'.

דוגמה:

אם A חבורה אבלית, $A'=\{e\}$, $A/A' \cong A$.

תרגיל:

הראו שכל חבורת-p סופית אינה מושלמת

פתרון:

לכל חבורת-p סופית יש תת-חבורה נורמלית מאינדקס p, והמנה לגביה חייבת להיות ציקלית (כי היא מסדר ראשוני).

אם G חבורת-p סופית אבלית, היא ודאי לא מושלמת. אחרת,
תהי $H \lhd G$ מאינדקס p. G/H אבלית, לכן $G' \subseteq H \subsetneq G$.

דוגמה:

ניקח $G=D_4$. ראינו בתרגיל בית כי $Z(D_4)=\{id,\sigma^2\}\lhd D_4$.

המנה $\left|D_4/Z(D_4)\right|=4$, לכן $D_4/Z(D_4)$ חבורה אבלית (כי היא מסדר 2^2),

ומהמשפט $D_4' \subseteq Z(D_4)=\{id,\sigma^2\}$. מכיוון ש-$D_4$ לא אבלית, לכן $D_4'\neq\{id\}$,

ונקבל $D_4'=\{id,\sigma^2\}$.

תרגיל:

חשבו את S_n' לכל $n\geq 5$.

פתרון:

$A_n \subseteq S_n$, לכן $A_n \underset{\text{ראינו}}{=} A_n' \leq S_n'$.

נראה כי $S_n'=A_n$ בשתי דרכים:

א. אם $\sigma,\tau\in S_n$,

$$\operatorname{sign}([\sigma,\tau])=\operatorname{sign}(\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1})=\operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\tau)\operatorname{sign}(\sigma^{-1})\operatorname{sign}(\tau^{-1})=1$$

לכן $S_n'\leq A_n$.

ב. באמצעות המשפט: $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2$ אבלית, לכן $S_n' \le A_n$.

$$\left[G/N \text{ אבלית} \iff G' \subseteq N \right]$$

<u>הערה:</u>

הטענה הנ"ל נכונה גם ל-S_3 ול-S_4, אבל מסיבות שונות.

<u>תרגיל:</u>

תהי G חבורה מסדר 28. הוכיחו:

א. יש לה תת-חבורה נורמלית מסדר 7.

ב. אם G לא אבלית, אז $|G'|=7$.

ג. אם G לא אבלית, אז $|Z(G)|=2$.

הניחו שקיימת תת-חבורה נורמלית $N \trianglelefteq G$ מסדר 2.

<u>פתרון:</u>

א. לפי משפט סילו III, $n_7 \mid 4$ וגם $n_7 \equiv 1 \pmod 7$

$\Leftarrow n_7 = 1 \Leftarrow$ יש תת-חבורה 7-סילו יחידה, P. לפי מסקנה

מסילו II, כיוון שהיא יחידה מתקיים $P \trianglelefteq G$.

ב. $P \trianglelefteq G$ והמנה G/P מסדר 4, לכן אבלית. מהמשפט, $G' \le P$.

$|P|=7$, לכן $P \cong \mathbb{Z}_7$, ויש לה שתי תת-חבורות: $\{e\}$ או P.

$G' \neq \{e\}$ כי G לא אבלית, ולכן $|G'|=7$, ו- $G'=P$.

ג. לפי משפט לגראנז', $|Z(G)| \mid |G|$. G לא אבלית, לכן

$|Z(G)| \in \{1, 2, \cancel{4}, 7, \cancel{14}, \cancel{28}\}$

G לא אבלית

הוכחנו בעבר: אם $G/Z(G)$ ציקלית - אז G אבלית.

כיוון ש-G לא אבלית, $G/Z(G)$ לא יכולה להיות ציקלית, ובפרט לא מסדר ראשוני. לכן $|Z(G)| \neq 4, 14$.

תהי $N \triangleleft G$ מסדר 2. כיוון ש-N תת-חבורה נורמלית היא איחוד של מחלקות צמידות, נכתוב $N=\{e,a\}$, ונקבל $\mathrm{conj}(a)=\{a\} \Rightarrow a\in Z(G)$. לכן $N\subseteq Z(G)$.

ממשפט לגראנז', $2=|N| \mid |Z(G)| \Rightarrow |Z(G)|\neq 1,7$.

מסקנה $|Z(G)|=2$.

סדרות נורמליות וסדרת הרכב

הגדרה:

תהי G חבורה. סדרה תת-נורמלית של G היא סדרה מהצורה

$$\{e\}=G_n \triangleleft G_{n-1} \triangleleft \cdots \triangleleft G_1 \triangleleft G_0 = G.$$

למנות G_i/G_{i+1} קוראים הגורמים של הסדרה.

דוגמה:

לכל חבורה G, $\{e\} \triangleleft G$ סדרה תת-נורמלית, והגורם שלה הוא $G/\{e\} \cong G$.

דוגמה:

$$\{id\} \underset{\mathbb{Z}_3}{\triangleleft} \langle(1\ 2\ 3)\rangle = A_3 \underset{\mathbb{Z}_2}{\triangleleft} S_3$$

הגדרה:

תהי $\{e\}=G_n\triangleleft G_{n-1}\triangleleft\cdots\triangleleft G_0=G$ סדרה תת-נורמלית. עידון שלה הוא הוספה של איזשהו גורם

$$\{e\}=G_n\triangleleft G_{n-1}\triangleleft\cdots\triangleleft G_{i+1} \underset{\neq}{\triangleleft} G_i^* \underset{\neq}{\triangleleft} G_i \triangleleft\cdots\triangleleft G_0=G$$

<u>סדרת הרכב</u> היא סדרה תת-נורמלית שלא ניתן לעדן.

סדרה תת-נורמלית היא סדרת הרכב $\Longleftrightarrow$ כל הגורמים פשוטים.

<u>דוגמה:</u>

סדרה תת-נורמלית שאינה סדרת הרכב:

$$\underbrace{\{(0,0)\} \triangleleft \mathbb{Z}_2 \times \{0\}}_{\mathbb{Z}_2} \triangleleft \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4}_{\mathbb{Z}_4}$$

סדרת הרכב:

$$\{(0,0)\} \underset{\mathbb{Z}_2}{\triangleleft} \mathbb{Z}_2 \times \{0\} \underset{\mathbb{Z}_2}{\triangleleft} \mathbb{Z}_2 \times \langle 2 \rangle \underset{\mathbb{Z}_2}{\triangleleft} \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$$

<u>דוגמה:</u>

לכל $n \geq 5$,

$$\{id\} \underset{A_n}{\triangleleft} A_n \underset{S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2}{\triangleleft} S_n$$

פשוטות

סדרת הרכב של S_n.

<u>דוגמה:</u>

סדרה תת-נורמלית שאינה סדרת הרכב

$$\{id\} \triangleleft A_4 \triangleleft S_4$$

נעדן:

$$\{id\} \underset{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}{\triangleleft} V_4 \underset{\mathbb{Z}_3}{\triangleleft} A_4 \underset{\mathbb{Z}_2}{\triangleleft} S_4$$

$V_4 = \{id, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$ תת-חבורת קליין/חבורת הארבעה של קליין

זו סדרה תת-נורמלית שאינה סדרת הרכב. נעדן:

$$\{id\} \underset{\mathbb{Z}_2}{\triangleleft} \langle (1\,2)(3\,4) \rangle \underset{\mathbb{Z}_2}{\triangleleft} V_4 \underset{\mathbb{Z}_3}{\triangleleft} A_4 \underset{\mathbb{Z}_2}{\triangleleft} S_4$$

<u>משפט:</u> (משפט ז'ורדן - הולדר)

כל סדרות ההרכב של G הן מאותו אורך עם אותם גורמים עד כדי סדר.

חבורות פתירות

הגדרה:

חבורה G היא <u>פתירה</u> (solvable) אם יש לה סדרה תת-נורמלית שבה כל המנות הן אבליות.

דוגמאות:

א. כל חבורה אבלית G פתירה. אכן, $\{e\} \triangleleft G$ סדרה תת-נורמלית, והגורם היחיד בה $G/\{e\} \cong G$ אבלי.

ב. לכל n, D_n פתירה. אכן, $\{id\} \triangleleft \langle \sigma \rangle \triangleleft D_n$ סדרה תת-נורמלית והגורמים בה הם $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_n$ שהן חבורות אבליות.

ג. לכל $n \geq 5$, S_n ו-A_n אינן פתירות.

ד. S_3, S_4 פתירות.

תרגיל:

הראו שחבורת הייזנברג $H(\mathbb{Z}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbb{Z}_p \right\}$ היא פתירה לכל p ראשוני.

פתרון:

נשים לב ש- $|H(\mathbb{Z}_p)| = p^3$. כמו כן, נסמן $Z = Z(H(\mathbb{Z}_p)) \triangleleft H(\mathbb{Z}_p)$.

בהכרח $|Z| = p$. [כי $|Z| \neq 1$ כי זו חבורת-p, $|Z| \neq p^3$ כי $H(\mathbb{Z}_p)$ לא אבלית, $|Z| \neq p^2$ כי $H(\mathbb{Z}_p)/Z$ לא יכול להיות ציקלי.]

לכן $\left| H(\mathbb{Z}_p)/Z \right| = p^2$, ובפרט אבלית.

נשתמש בסדרה תת-נורמלית

$$\{e\} \triangleleft Z \triangleleft H(\mathbb{Z}_p)$$

כל הגורמים אבליים, לכן $H(\mathbb{Z}_p)$ פתירה.

[תרגיל לבית: $H(F)$ פתירה לכל שדה F]

משפט:

כל חבורת-p סופית היא פתירה.

תרגיל:

תהי G חבורה מסדר pq כאשר p,q ראשוניים. הוכיחו ש-G פתירה.

פתרון:

אם $p=q$ אז $|G|=p^2$, לכן G אבלית ובפרט פתירה.

לכן נניח $p\neq q$, בה"כ $p>q$. לפי סילו III, $n_p\equiv 1 \pmod p$, $n_p \mid q$

$\Leftarrow$ $n_p=1$. תהי P תת-חבורה p-סילו, אז

$$\{e\}\lhd P\lhd G$$

סדרה תת-נורמלית. $P/\{e\}\cong P\cong \mathbb{Z}_p$ כי $|P|=p$, $G/P\cong\mathbb{Z}_q$ כי $|G/P|=q$ ראשוני

שני הגורמים אבליים, ולכן G פתירה.

תרגיל:

כל חבורה מסדר $1089=33^2=3^2\cdot 11^2$ היא פתירה.

פתרון:

תהי G מסדר 1089. לפי סילו III, $n_{11}\equiv 1 \pmod{11}$, $n_{11}\mid 9$ $\Leftarrow$ $n_{11}=1$

תהי Q תת-חבורת 11-סילו של G, $Q\lhd G$ כי $n_{11}=1$.

$|G/Q| = 9 = 3^2$, לכן G/Q אבלית כמו כן $|Q|=11^2$, לכן גם Q אבלית.

$|Q|=11^2$

מכאן שבסדרה התת-נורמלית $G \triangleright Q \triangleright \{e\}$ כל הגורמים אבליים.
לכן G פתירה.

<u>משפט:</u>

תהי $N \triangleleft G$. אז G פתירה $\Longleftrightarrow$ $N, G/N$ פתירות.

<u>דוגמה:</u>

תהי G חבורה מסדר $3^2 \cdot 11^3 = 11979 = |G|$. כמו בתרגיל הקודם,
$n_{11}=1$. לכן תת חבורה 11-סילו Q נורמלית ב-G.
$|Q|=11^3$ פתירה, כי זו חבורת-11.
$|G/Q|=9$ פתירה, כי היא אבלית.
מהמשפט, נקבל ש-G פתירה.

<u>הגדרה:</u>

תהי G חבורה. <u>סדרת תת-חבורות הנגזרת שלה</u> היא

$$G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}] = (G^{(n)})' \quad , \quad G^{(0)} = G.$$

למשל $G^{(1)} = G'$.

לכל n מתקיים $G^{(n)} \triangleleft G$, בפרט $G^{(n)} \triangleleft G^{(n-1)}$.

$$G \triangleright G^{(1)} \triangleright G^{(2)} \triangleright G^{(3)} \triangleright \dots$$

<u>משפט:</u>

G פתירה $\Longleftrightarrow$ קיים t כך ש-$G^{(t)}=\{e\}$.

דוגמה:

אם $G=D_3$, אז $G^{(1)}=G'=\langle\sigma\rangle$ ו- $G^{(2)}=\{id\}$. לכן G פתירה.

דוגמה:

לכל $n\geq 5$, $S_n^{(1)}=S_n'=A_n$, $S_n^{(2)}=A_n'=A_n$, ולכן לכל $k\geq 2$ $S_n^{(k)}=A_n$.

לכן S_n אינה פתירה לכל $n\geq 5$.

תרגיל:

$G\neq\{e\}$

תהי G חבורה פתירה ולא טריוויאלית. הוכיחו כי יש לה תת-חבורה נורמלית אבלית שאינה $\{e\}$.

פתרון:

G פתירה, לכן קיים t מינימלי כך ש- $G^{(t)}=\{e\}$.

אז $G^{(t-1)}\triangleleft G$, אבלית כי $(G^{(t-1)})'=G^{(t)}=\{e\}$, ושונה מ- $\{e\}$ כיוון ש-t הוא המינימלי שעבורו $G^{(t)}=\{e\}$.