

## פונקציות מרוכבות – פתרון תרגיל 10

$$1. f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{z-2} \text{ . נפתח את } \frac{1}{z^2} \text{ בלבד.}$$

א. נשתמש בפיתוח הנדסי בטבעת  $|z-2| > 2$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-2+2} = \frac{1}{z-2} \frac{1}{1+\frac{2}{z-2}} = \frac{1}{z-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n (z-2)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n (z-2)^{-n-1}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-2)^n (z-2)^{-n-3} \text{ . מכאן } -\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} -(n+1)(-2)^n (z-2)^{-n-2}$$

ב. נשתמש בפיתוח הנדסי בטבעת  $0 < |z-2| < 2$

$$\text{נגזור לקבל } \frac{1}{z} = \frac{1}{z-2+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z-2}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} (z-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-2)^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^{n-1}}{2^{n+1}} (z-2)^{n-2} \text{ . מכאן } -\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{2^{n+1}} (z-2)^{n-1}$$

2.

$$. \text{ א. } g(z) = z^3 e^{-1/z^2} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-2n+3}$$

ב. השארית מתקבלת כאשר  $n = 2$ , והיא  $\frac{1}{2}$ .

.3

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z+3i)^2(z-3i)^2}$$

נשים לב שבסביבת  $3i$  הפונקציה

$$g(z) = \frac{ze^{iz}}{(z+3i)^2}$$

היא אנליטית ולכן טור לורן שלה הוא טור טיילור

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-3i)^n$$

ולכן

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-3i)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-3i)^{n-2}$$

כלומר החלק העיקרי הוא

$$a_0(z-3i)^{-2} + a_1(z-3i)^{-1}$$

אבל כידוע,

$$a_0 = g(3i) \quad a_1 = g'(3i)$$

כלומר

$$a_0 = \frac{3ie^{-3}}{(6i)^2} = \frac{3i}{e^3(-36)} = -\frac{i}{12e^3}$$

כמו כן,

$$\begin{aligned} g'(z) &= \frac{(e^{iz} + iz e^{iz})(z+3i)^2 - 2(z+3i)(ze^{iz})}{(z+3i)^4} \\ &= e^{iz} \frac{(1+iz)(z+3i) - 2z}{(z+3i)^3} \end{aligned}$$

ולכן

$$g'(3i) = \frac{1}{e^3} \frac{(-2)(6i) - 6i}{(6i)^3} = \frac{1}{e^3} \frac{-3}{-36} = \frac{1}{12e^3}$$

כלומר החלק העיקרי הוא:

$$-\frac{i}{12e^3}(z-3i)^{-2} + \frac{1}{12e^3}(z-3i)^{-1}$$

4. א. כן זה ייתכן ל  $f(z) = z$  יש רק חזקות חיוביות ול  $\frac{1}{z}$  יש רק חזקות שליליות.  
 ב. זה לא ייתכן. אם ל  $f(z)$  יש רק חזקות חיוביות אז היא אנליטית או שהסינגולריות שלה ב 0 סליקה ואז

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$$

הוא מספר. ואז

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f(z)}$$

קיים במובן הרחב (מספר או אינסוף) וזה אומר ש  $z = 0$  אינה סינגולריות עיקרית אז בטור לורן אין אינסוף חזקות שליליות.  
 5. לפי התנאים

$$f(z) = \frac{\tilde{f}(z)}{(z - z_0)^2} \quad g(z) = (z - z_0)^3 \tilde{g}(z)$$

$$r(z) = (z - z_0)^2 \tilde{r}(z) \quad h(z) = (z - z_0) \tilde{h}(z)$$

כאשר כל הטילדות אנליטיות ולא מתאפסות ב  $z_0$ .  
 א.

$$\frac{f(z)g(z)}{r(z) + h(z)} = \frac{(z - z_0) \tilde{f}(z) \tilde{g}(z)}{(z - z_0)^2 \tilde{r}(z) + (z - z_0) \tilde{h}(z)} = \frac{\tilde{f}(z) \tilde{g}(z)}{(z - z_0) \tilde{r}(z) + \tilde{h}(z)}$$

מה שנשאר אנליטי ב  $z_0$  ולכן  $z_0$  סינגולריות סליקה.  
 ב.

$$\frac{f(z) + g(z)}{r(z) + h(z)} = \frac{\frac{\tilde{f}(z)}{(z - z_0)^2} + (z - z_0)^3 \tilde{g}(z)}{(z - z_0)^2 \tilde{r}(z) + (z - z_0) \tilde{h}(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^3} \frac{\tilde{f}(z) + (z - z_0)^5 \tilde{g}(z)}{(z - z_0) \tilde{r}(z) + \tilde{h}(z)}$$

הפונקציה  $\frac{\tilde{f}(z) + (z - z_0)^5 \tilde{g}(z)}{(z - z_0) \tilde{r}(z) + \tilde{h}(z)}$  אנליטית ב  $z_0$  ולכן  $z_0$  היא קוטב מסדר 3.