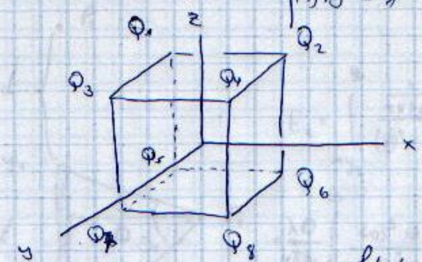
חשמל ומגנטיות - תרגיל 1 - פתרון




א) $Q_4$ , $Q_8$ מבטלים.

או - הזוגות $Q_2, Q_7$ ; $Q_6, Q_3$ מבטלים זה את זה.

- את הזוגות $Q_4, Q_5$ ; $Q_1, Q_8$ ניתן להחליף במטען יחיד בגודל $-2Q$ בנקודות $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ , $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

הכוחות שיפעילו המטענים החדשים:

$$F_4 = \frac{-2Q^2}{4\pi\varepsilon_0 \frac{3}{4}} = -\frac{2Q^2}{3\pi\varepsilon_0}(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$$

$$F_8 = -\frac{2Q^2}{3\pi\varepsilon_0}(\hat{x},\hat{y},-\hat{z})$$

רכיבי z מבטלים זה את זה, רכיבי x,y מסתכמים יחד, ולכן הכח פועל במישור x,y.

נחשב את הטל הכח על כל אחד מהצירים:

$$F_{x,y} = 2\cdot\frac{-2Q^2}{3\pi\varepsilon_0}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}_{\text{היטל למישור } x,y}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\text{היטל לציר } x \text{ או } y} = \underline{\underline{-\frac{4Q^2}{3\cdot\sqrt{3}\pi\varepsilon_0}}}$$

ב. הכח בנקודה $(1,0,0)$

הפאה האחורית תורמת כח בציר x בלבד:

$$F_x = 4\left[\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{1}{2}^2+\frac{1}{2}^2+1.5^2\right)}\right]\cdot\cos\varphi = \frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0\cdot 2.75}\cdot\frac{1.5}{\sqrt{2.75}} \approx 0.33\frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0}\hat{x}$$

הפאה הקדמית תורמת כח בציר y בלבד:

$$F_y = 4\cdot\left[\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{3}{4}\right)}\cdot\cos\theta\right] = \frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0\left(\frac{3}{4}\right)}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0}\hat{y}$$

2


$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e}{(i)^2} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\sum_i\frac{1}{(i)^2} =$$

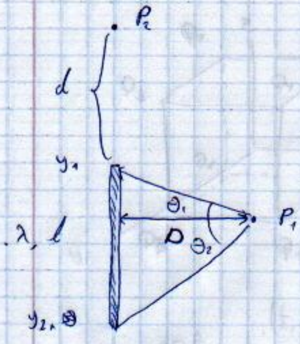
$$= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\pi^2}{6} = \underline{\frac{\pi e}{24\varepsilon_0}\hat{x}}$$

3

היחס בין המשיכה החשמלית והגרביטציונית בין שני אלקטרונים:

$$\frac{F_g}{F_E} = \frac{\frac{G\cdot m_e^2}{r^2}}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e^2}{r^2}} = \sim \frac{10^{-11}\cdot(10^{-30})^2}{10^{10}\cdot(10^{-19})^2} = 10^{-43} \Rightarrow F_g \ll F_E$$

(4)




א. רכיב x:

$$E_x = \int_{-y_2}^{y_1} \frac{\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}}{(D^2+y^2)} \cdot \frac{D}{(D^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \, dy =$$

הצבה:

$$\tan\theta = \frac{y}{D}$$

$$y = D \cdot \tan\theta$$

$$dy = \frac{D}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$\left[D^2+y^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{D}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\lambda D}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{\cos^3\theta}{D^3} \cdot \frac{D}{\cos^2\theta} \, d\theta =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 D} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \cos\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 D} \left[\sin\theta_1 - \sin\theta_2\right] = E_x$$

גל, y:

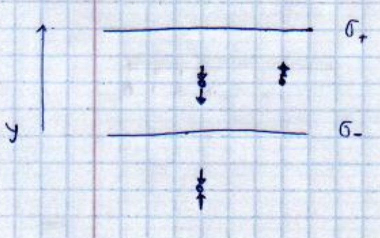
$$E_y = \int_{y_2}^{y_1} \frac{\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}}{(D^2+y^2)} \frac{y\,dy}{(D^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{\cos^3\theta}{D^3} \cdot D\tan\theta \cdot \frac{D}{\cos^2\theta} \, d\theta =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 D} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \sin\theta \, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 D} \left[\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right] = E_y$$

ב. במקרה זה, יש רק רכיב $\hat{y}$ לשדה:

$$E_y = \int_d^{d+l} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 \cdot (y)^2} \, dy = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{y}\right]_d^{d+l} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{d} - \frac{1}{d+l}\right]$$

(5) השדה שמושרה ע"י לוח אינסופי: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, בניצב ללוח. (שדה זה אינו תלוי במרחק!).




בין הלוחות:

$$E_T = \Sigma E = \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0}(\hat{y}) + \frac{\sigma_-}{2\varepsilon_0}(\hat{y}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(-\hat{y})$$

מחוץ ללוחות:

$$E_T = \Sigma E = \frac{\sigma_+}{2\varepsilon_0}(-\hat{y}) + \frac{\sigma_-}{2\varepsilon_0}(\hat{y}) = 0$$

(באופן דומה עבור ~~הפנים~~ הצד השני של הלוחות)

6. א. השדה הכולל הוא סופרפוזיציה של השדות משני המטענים. נוח לחשב לפי רכיבים:

$$E_x(x,y)=\frac{kQ}{\left(y^2+(x-1)^2\right)}\cdot\cos(\theta)-\frac{1}{2}\frac{kQ}{\left(y^2+(x+1)^2\right)}\cdot\cos(\theta)=$$

$$=\frac{kQ}{\left(y^2+(x-1)^2\right)}\cdot\frac{x}{\left(y^2+(x-1)^2\right)^{1/2}}-\frac{1}{2}\frac{kQ}{\left(y^2+(x+1)^2\right)}\cdot\frac{x}{\left(y^2+(x+1)^2\right)^{1/2}}=$$

$$=kQx\left[\frac{1}{\left(y^2+(x-1)^2\right)^{3/2}}-\frac{1}{2\left(y^2+(x+1)^2\right)^{3/2}}\right]\hat{x}$$

$$E_x(x,y)=kQy\left[\frac{1}{\left(y^2+(x-1)^2\right)^{3/2}}-\frac{1}{2\left(y^2+(x+1)^2\right)^{3/2}}\right]\hat{y}$$

ב. משיקולי סימטריה הכוח יתאפס רק על ציר X. ורק משמאל למטען השלילי ($x<-1$) נדרוש:

$$\frac{-0.5kQ}{(x+1)^2}=\frac{kQ}{(x-1)^2}$$

$$x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-4}}{2}\ \Rightarrow\ x_1=-3-2\sqrt{2}\ ;\ x_2=-3+2\sqrt{2}\ (which\ is\ a\ non\ relevant\ solution)$$

10. <u>סדר הכוחות ע"פ גודלם :</u>

$$\boxed{F_3<F_1<F_2}$$

11. על כל אחד מהכדורים פועלים שלושה כוחות, הם כוח הכבידה, הכוח החשמלי וכוח המתיחות של החוט. מכיוון והמערכת במצב סטאטי נוכל לרשום את משוואות הכוחות:

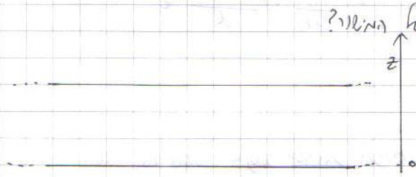
עבור הכדור הראשון
$$\begin{cases}T_1\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+Eq_1=0\\ T_1\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-Mg=0\end{cases}\Rightarrow Eq_1=-Mg\tan\alpha$$

עבור הכדור השני
$$\begin{cases}T_2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+Eq_2=0\\ T_2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-2Mg=0\end{cases}\Rightarrow Eq_2=-2Mg\tan\beta$$

והיחס המתקבל: $\frac{q_1}{q_2}=\frac{\tan\alpha}{2\tan\beta}$

7

מישור אינסופי בעובי $d$, מהו השדה מעל המישור?




א) צפיפות מטען קבועה $\rho = \rho_0$

ב) $\rho(z) = \rho_0 \frac{z}{d}$

② מהו השדה החשמלי בתוך המישור?

① א. נחלק למישורים בעובי $dz$.

$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}$ של מישור אינסופי

אנלוגי: $dq = \rho_0\, dx\, dy\, dz$

$\sigma = \rho_0\, dz \Rightarrow dq = \sigma\, dx\, dy$

$d\vec{E} = \frac{\rho_0\, dz}{2\varepsilon_0}\hat{z}$ של מישור דק

$$\boxed{\vec{E} = \int_0^d d\vec{E} = \frac{\rho_0 d}{2\varepsilon_0}\hat{z}}$$

ב. $\sigma = \frac{\rho_0}{d} \cdot z\, dz$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 d}\int_0^d z\, dz = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 d}\,\frac{1}{2}z^2\Big|_0^d = \frac{\rho_0 d^2}{4\varepsilon_0 d} = \boxed{\frac{\rho_0 d}{4\varepsilon_0}\hat{z}}$$

② בתוך המישור:


א)

שני מישורים בעובי $z$ מבטלו זה את זה, ונשאר משטח בעובי $d-2z$

ומכאן: $\vec{E} = \frac{-\rho_0}{2\varepsilon_0}(d-2z)\hat{z}$

לפי הציור, השדה החשמלי מכוון כלפי מטה.

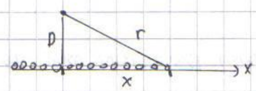
$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 d}\left[\int_0^h z\,dz - \int_h^d z\,dz\right]$$ (2)

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 d}\cdot\frac{1}{2}\left[h^2 - d^2 + h^2\right] = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0}\cdot\frac{2h^2-d^2}{d}\,\hat{z}$$

---

9

השדה של מישור אינסופי כסכום תיילים




קיבלנו ש $E = \frac{2k\lambda}{r}$ לתיל

$\sigma$ - צפיפות המישור $\left[\frac{C}{m^2}\right]$ $\Leftarrow$ $\lambda = \sigma dx$ $\left[\frac{C}{m}\right]$ - צפיפות של תיל

$$(dq = \sigma dx dy = \lambda dy)$$

של תיל $d\vec{E} = \frac{2k\sigma dx}{(D^2+x^2)^{1/2}}\cos\theta = 2k\sigma\frac{D}{(D^2+x^2)}dx$

$$\vec{E} = \int_{-\infty}^{\infty} 2k\sigma D\,\frac{dx}{(D^2+x^2)}$$

$x = D\tan\theta$ מחליף משתנים:

$dx = \frac{D}{\cos^2\theta}d\theta$

מחליף גבולות: $x = -\infty \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$

$x = \infty \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$$D^2 + x^2 = D^2(1+\tan^2\theta) = \frac{D^2}{\cos^2\theta}$$

$$E = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2k\sigma D\cdot\frac{\cos^2\theta}{D^2}\cdot\frac{D}{\cos^2\theta}\,d\theta = 2k\sigma\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = 2\pi k\sigma = \boxed{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

חלקיק בעל מסה m ומטען חשמלי q בראשית הצירים בזמן t=0.

מפעילים שדה חשמלי:

$$\vec{E}=E_0\cos(\omega t)\,\hat{x}+E_0\sin(\omega t)\,\hat{y}+E_0 t\,\hat{z}$$

א. נחשב את מהירות החלקיק:

נמצא את הכוח החשמלי הפועל על החלקיק:

$$\vec{F}=\vec{E}\cdot q$$

$$\vec{F}=qE_0\cos(\omega t)\,\hat{x}+qE_0\sin(\omega t)\,\hat{y}+qE_0 t\,\hat{z}$$

לפי חוק 3 של ניוטון:

$$\vec{F}=m\vec{a}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}=\frac{qE_0}{m}\cos(\omega t)\,\hat{x}+\frac{qE_0}{m}\sin(\omega t)\,\hat{y}+\frac{qE_0}{m}t\,\hat{z}$$

מהירות החלקיק:

$$\vec{V}(t)=\int\vec{a}\,dt$$

$$\vec{V}=\frac{qE_0}{m}\left[\int\cos(\omega t)\,dt\,\hat{x}+\int\sin(\omega t)\,dt\,\hat{y}+\int t\,dt\,\hat{z}\right]$$

$$\vec{V}=\frac{qE_0}{m}\left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\,\hat{x}-\frac{\cos(\omega t)}{\omega}\,\hat{y}+\frac{t^2}{2}\,\hat{z}\right]+\vec{V_0}$$

לפי תנאי ההתחלה:

$$\vec{R}(t=0)=(0,0,0)$$

$$\vec{V}(t=0)=(0,0,0)$$

ידוע ש:

$$\vec{V_0}=0$$

ולכן מהירות החלקיק היא:

$$\boxed{\vec{V}(t)=\frac{qE_0}{m\omega}\left(\sin(\omega t)\,\hat{x}-\cos(\omega t)\,\hat{y}+\frac{t^2\omega}{2}\,\hat{z}\right)}$$

ד. נמצא את קורדינטות החלקיק

$$\vec{R}(t) = \int \vec{v}\, dt$$

$$\vec{R}(t) = \frac{q\varepsilon_0}{m\omega}\left[\int \sin(\omega t)\,dt\ \hat{x} - \int \cos(\omega t)\,dt\ \hat{y} + \int \frac{\omega t^2}{2}\,dt\ \hat{z}\right]$$

$$\vec{R}(t) = \frac{q\varepsilon_0}{m\omega^2}\left(-\cos(\omega t)\,\hat{x} - \sin(\omega t)\,\hat{y} + \frac{\omega^2 t^3}{6}\,\hat{z}\right) + \vec{R}_0$$

לפי תנאי התחלה:

$$\vec{R}(t=0) = (0,0,0)$$
$$\vec{V}(t=0) = (0,0,0)$$

ידוע ש:

$$\vec{R}_0 = 0$$

ולכן קורדינטות החלקיק הם:

$$\boxed{\vec{R}(t) = \frac{q\varepsilon_0}{m\omega^2}\left(-\cos(\omega t)\,\hat{x} - \sin(\omega t)\,\hat{y} + \frac{\omega^2 t^3}{6}\,\hat{z}\right)}$$

ה. נמצא את זמני $t$ בהם $y=0$.

$$y(t) = -\sin(\omega t) = 0 \Rightarrow \omega t = n\pi$$

כאשר $n = 1, 2, 3, \dots$ כלומר זמני $t$ בהם $y=0$ הם: $t = \frac{n\pi}{\omega}$

ערכי $x,z$ שהחלקיק נמצא כאשר $y(t)=0$:

$$x = -\frac{q\varepsilon_0}{m\omega^2}\cos(\omega t) = -\frac{q\varepsilon_0}{m\omega^2}\cos\left(\frac{n\pi}{\omega}\cdot\omega\right) = (-1)^{n+1}\cdot\frac{q\varepsilon_0}{m\omega^2}$$

$$z = \frac{q\varepsilon_0}{6m}t^3 = \frac{q\varepsilon_0}{6m}\cdot(n\pi)^3$$

רכיבי המהירות כאשר $y(t)=0$:

$$V_x = \frac{q\varepsilon_0}{m\omega}\sin(\omega t) = \frac{q\varepsilon_0}{m\omega}\sin\left(\omega\cdot\frac{n\pi}{\omega}\right) = 0$$

$$V_y = -\frac{q\varepsilon_0}{m\omega}\cos(\omega t) = -\frac{q\varepsilon_0}{m\omega}\cos\left(\omega\cdot\frac{n\pi}{\omega}\right) = \frac{q\varepsilon_0}{m\omega}(-1)^{n+1}$$

$$V_z = \frac{q\varepsilon_0}{2m}t^2 = \frac{q\varepsilon_0}{2m}(n\pi)^2$$

(9) דיסקה ברדיוס $a$ טעונה בצפיפות משטחית $\sigma\left(\frac{C}{m^2}\right)$, חשב את השדה מעל מרכז הדיסקה.

ניקח טבעות בעובי $dr$.


השדה של טבעת (תרגיל 2.): $E = \frac{\lambda r}{2\varepsilon_0} \frac{z}{(z^2+r^2)^{3/2}}$

בטבעת: $dq = \lambda dl = \lambda r d\theta$

עבורנו: $dq = \sigma\, dl\, dr$

$$dq = \sigma \underbrace{r\, d\theta}_{dl} dr$$

$$\lambda = \sigma\, dr$$

השדה של טבעת בעובי $dr$: $dE = \frac{\sigma r z\, dr}{2\varepsilon_0 (z^2+r^2)^{3/2}}$

$$E = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \int_0^a \frac{r}{(z^2+r^2)^{3/2}} dr = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \frac{-1}{(z^2+r^2)^{1/2}} \Big|_0^a$$

$$E = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{(z^2+a^2)^{1/2}} \right] \hat{z}$$

כאשר $a \to \infty$

↓

מישור (אינסופי):

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{z}$$

---

אפשרות נוספת - אינטגרציה ישירה:

$$dE = \frac{k\, dq}{R^2} \frac{z}{r} = \frac{kz}{R^3} dq$$

$$R = (r^2+z^2)^{1/2}, \quad dq = \sigma r\, d\theta\, dr$$

$$E = \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{kz}{(r^2+z^2)^{3/2}} \sigma r\, d\theta\, dr = kz\sigma \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}} d\theta\, dr = 2\pi k z \sigma \int_0^a \frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}} dr$$

$$= \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \left[ \frac{-1}{(r^2+z^2)^{1/2}} \right] \Big|_0^a = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{(z^2+a^2)^{1/2}} \right] \hat{z}$$

כנ"ל.