פתרון תרגיל בית 8

שאלה 1

עבור הפונקציות הבאות מצא פיתוח מקלורן עד לסדר 3.

א. $f(x)=\tan x$.

ב. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

ג. $f(x)=\ln(x+e)$.

פתרון שאלה 1

סעיף א

נחשב את $f(0), f'(0), f''(0), f^{(3)}(0)$.

$f(0)=0 \Leftarrow f(x)=\tan x$.

$f'(0)=1 \Leftarrow f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$.

$$f''(0)=0 \Leftarrow f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x} \Leftarrow f''(x)=2\sin x(\cos x)^{-3} \Leftarrow f'(x)=(\cos x)^{-2}$$

$$f^{(3)}(x)=2 \Leftarrow f^{(3)}(x)=\frac{2\cos x\cdot\cos^3 x-2\sin x\cdot 3\cos^2 x\cdot(-\sin x)}{\cos^6 x} \Leftarrow f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x} .$$

הפולינום המבוקש הוא $P_3(x)=x+\frac{x^3}{3}$.

סעיף ב

נחשב את $f(0), f'(0), f''(0), f^{(3)}(0)$.

$f(0)=1 \Leftarrow f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

$f'(0)=0 \Leftarrow f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

$$f''(0)=1 \Leftarrow f''(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \Leftarrow f''(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \Leftarrow f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

הפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ היא פונקציה זוגית, ולכן $f^{(3)}(0)=0$.

הפולינום המבוקש הוא: $P_2(x)=1+\frac{x^2}{2}$.

סעיף ג

נחשב את $f(0), f'(0), f''(0), f^{(3)}(0)$.

$f(0)=1 \Leftarrow f(x)=\ln(x+e)$.

$f'(0)=\frac{1}{e} \Leftarrow f'(x)=\frac{1}{x+e}$.

$f''(0)=\frac{-1}{e^2} \Leftarrow f''(x)=\frac{-1}{(x+e)^2}$.

$f^{(3)}(0)=\frac{2}{e^3} \Leftarrow f^{(3)}(x)=\frac{2}{(x+e)^3}$.

הפולינום המבוקש הוא: $P_3(x)=1+\frac{x}{e}-\frac{x^2}{2e^2}+\frac{x^3}{3e^3}$

שאלה 2

היעזר בפיתוח לפולינו מקלורן של הפונקציות $e^x, \sin x, \cos x$ ומצא פיתוח עד לסדר 9 של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = xe^{x^2}$.

ב. $f(x) = x^2 \sin x$.

ג. $f(x) = \sin^2 x$.

פתרון שאלה 2

סעיף א

ראינו בשיעור שהפיתוח של הפונקציה e^x הוא $P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$.

הפיתוח של e^{x^2} הוא $P_8(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}$.

סה"כ נקבל שהפיתוח של $f(x) = xe^{x^2}$ הוא $P_9(x) = x + x^3 + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \frac{x^9}{4!}$.

סעיף ב

ראינו בשיעור שהפיתוח של $\sin x$ הוא $P_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$.

סה"כ נקבל שהפיתוח של $f(x) = x^2 \sin x$ הוא $P_9(x) = x^3 - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^7}{5!} - \frac{x^9}{7!}$.

סעיף ג

נשתמש בזהות $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha \Leftarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\alpha)$.

יש למצוא פיתוח של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$.

ראינו בשיעור שהפיתוח של $\cos x$ הוא $P_8(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$

סה"כ נקבל שהפיתוח של $f(x) = \sin^2 x$ הוא

$$P_8(x) = -\frac{1}{2} + 2x^2 - \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^6}{45} - \frac{2x^8}{315} \Leftarrow P_8(x) = \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \frac{(2x)^8}{8!}\right)$$

שאלה 3

עבור הפונקציות הבאות מצא פיתוח טיילור מסדר 3 סביב הנקודה הנתונה.

א. $f(x) = \ln x \quad x_0 = 1$.

ב. $f(x) = \frac{1}{x} \quad x_0 = 1$.

ג. $f(x) = \sqrt[3]{x} \quad x_0 = 8$.

פתרון שאלה 3

סעיף א

נחשב את $f(1),\ f'(1),\ f''(1),\ f^{(3)}(1)$.

$f(x)=\ln x \Rightarrow f(1)=0$.

$f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(1)=1$.

$f'(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f''(x)=-\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1)=-1$.

$f''(x)=-\frac{1}{x^2} \Rightarrow f^{(3)}(x)=\frac{2}{x^3} \Rightarrow f^{(3)}(1)=2$.

$P_3(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}$.

סעיף ב

נחשב את $f(1),\ f'(1),\ f''(1),\ f^{(3)}(1)$.

$f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f(1)=1$.

$f(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(1)=-1$.

$f'(x)=-\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x)=\frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(1)=2$.

$f''(x)=\frac{2}{x^3} \Rightarrow f^{(3)}(x)=\frac{-6}{x^4} \Rightarrow f^{(3)}(1)=-6$.

$P_3(x)=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3$.

סעיף ג

נחשב את $f(8),\ f'(8),\ f''(8),\ f^{(3)}(8)$.

$f(x)=x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f(8)=2$.

$f(x)=x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow f'(8)=\frac{1}{12}$.

$f'(x)=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow f''(x)=\frac{-2}{9x^{\frac{5}{3}}} \Rightarrow f''(8)=\frac{-1}{144}$.

$f''(x)=\frac{-2}{9x^{\frac{5}{3}}} \Rightarrow f^{(3)}(x)=\frac{10}{27x^{\frac{8}{3}}} \Rightarrow f^{(3)}(8)=\frac{5}{3456}$.

$P_3(x)=2+\frac{1}{12}(x-8)-\frac{1}{144}(x-8)^2+\frac{5}{3456}(x-8)^3$.

<u>שאלה 4</u>

בעזרת פיתוח פונקציות לטור טיילור חשב את המספרים הבאים עד לקירוב של 0.01. (היעזר בשארית לגראנז' כדי לקבוע מהו סדר של הפולינום שיש לפתח כדי לקבל את הקירוב הדרוש)

א. $\sin 1$.

ב. $\sqrt[3]{9}$.

<u>פתרון שאלה 4</u>

<u>משפט לגרנז'</u>

נניח ש $P_n\left(x\right)$ פולינום טיילור מסדר n של פונקציה $f\left(x\right)$ בנקודה a אז קיימת נקודה $a<c<x$

כך ש $R_n\left(x\right)=\frac{f^{(n+1)}\left(c\right)}{\left(n+1\right)!}\left(x-a\right)^{n+1}$

<u>סעיף א</u>

נחשב את שארית לגראנז' $R_n\left(x\right)=\frac{f^{(n+1)}\left(c\right)}{\left(n+1\right)!}\left(x-a\right)^{n}$, מכיוון שמדובר בפולינום מקלורן נקבל ש

$a=0$. נשים לב ש $\left|f^{(n+1)}\left(c\right)\right|\le 1$ לכל $0<c<1$. $\left|R_n\left(1\right)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}\left(c\right)}{\left(n+1\right)!}\left(1-a\right)^{n}\right|\le\frac{1}{\left(n+1\right)!}$.

הדיוק הדרוש הוא $\frac{1}{100}$. נשים לב ש $5!=120$ ולכן $\frac{1}{5!}<\frac{1}{100}$.

מספיק לחשב את פולינום מקלורן עד לסדר 4 מכיוון ש $f^{(4)}\left(x\right)=0$ נחשב את פולינום מקלורן מסדר 5.

ראינו בשיעור שהפיתוח של $\sin x$ הוא $P_5\left(x\right)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$.

$$P_5\left(1\right)=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}=\frac{101}{120}=0.84166666.....$$

$$\sin 1=0.8414709.....$$

<u>סעיף ב</u>

נחשב את שארית לגראנז' $R_n\left(x\right)=\frac{f^{(n+1)}\left(c\right)}{\left(n+1\right)!}\left(x-a\right)^{n}$, מכיוון שמדובר בפולינום טיילור סביב

$x_0=8$ נקבל ש $a=8$. $R_n(9)=\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(9-8)^n=\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}$ כאשר $8<c<9$.

$$R_1(9)=\frac{f''(c)}{2!}=\left|\frac{-2}{9\cdot c^{\frac{5}{3}}\cdot 2!}\right|\le\frac{1}{9\cdot 8^{\frac{5}{3}}}=\frac{1}{288}.$$

הדיוק הדרוש הוא $\frac{1}{100}$.

מספיק לחשב את פולינום טיילור עד לסדר 1. $P_1(x)=2+\frac{1}{12}(x-8)=\frac{1}{12}x+\frac{4}{3}$.

נשים לב: $P_1(9)=2.083333...$, $\sqrt[3]{9}=2.08008...$.

אכן השגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$.

<u>שאלה 5</u>

מצא טור מקלורן אינסופי לפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3\sin 2x$.

ב. $f(x)=\cos^2 x$.

ג. $f(x)=e^{x^2}$.

<u>פתרון שאלה 5</u>

<u>סעיף א</u>

ראינו ש $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ ולכן

$\sin 2x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot(2x)^{2n+1} \Leftarrow x^3\sin 2x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+4}$.

<u>סעיף ב</u>

$\cos 2x=2\cos^2 x-1 \Leftarrow \cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$.

ראינו ש

$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \Leftarrow \cos 2x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n} \Leftarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$

סה"כ קיבלנו ש $\cos^2 x=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$.

<u>סעיף ג</u>

ראינו ש $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ ולכן $e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$.

<u>שאלה 6</u>

א. רשום את הפונקציה $\frac{1}{1-x^2}$ כטור חזקות.

ב. רשום את הפונקציה $\ln\frac{1+x}{1-x}$ כטור חזקות (הדרכה: חשב את הנגזרת של $\ln\frac{1+x}{1-x}$ והשתמש בסעיף קודם).

ג. הצג $\ln 7$ כטור אינסופי.

<u>פתרון שאלה 6</u>

<u>סעיף א</u>

סכום סדרה הנדסית אינסופית שמנתה q כך ש $-1<q<1$ הוא $\frac{a_1}{1-q}$ ולכן

$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ בתחום $-1<x<1$ ולכן $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$ בתחום $-1<x<1$.

<u>סעיף ב</u>

נחשב טור טיילור עבור $\ln\frac{1+x}{1-x}$. $\frac{2}{1-x^2}=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'=\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)'$.

ראינו ש $\sum_{n=0}^{\infty}2x^{2n}=\frac{2}{1-x^2}$ ומכיוון ש $\ln\frac{1+x}{1-x}=\int\frac{2}{1-x^2}dx$ נקבל $\ln\frac{1+x}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$.

<u>סעיף ג</u>

$\frac{1+x}{1-x}=7 \Leftarrow 1+x=7-7x \Leftarrow 8x=6 \Leftarrow x=\frac{3}{4}$.

מסעיף ב $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}=\ln\frac{1+x}{1-x} \Leftarrow = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{4n+1}\cdot(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\cdot 3^{2n+1}}{4^{2n+1}\cdot(2n+1)} = \ln 7$