# שאלות לחזרה

1. הוכיחו את הטענה הבאה:
כל וקטור שונה מאפס $v \in V$ הוא ווקטור עצמי של אופרטור לינארי $A$ אם ורק אם $A$ הוא מהצורה $x \mapsto \alpha x$ עבור סקלר כלשהו $\alpha$.
2. יהיו $A,B \in M_n(F)$ ונניח שיש ל- $A$ $n$ ערכים עצמיים שונים. הוכיחו שאם $AB = BA$ אזי קיים ל- $B$ בסיס עצמי.
3. יהיו $A,B \in M_n(F)$ ויהי $\lambda$ ערך עצמי של $A$. נסמן ב- $E_\lambda$ את המרחב העצמי השייך לערך עצמי זה. הוכיחו שאם $AB = BA$ אזי $E_\lambda$ הוא תת מרחב $B$ אינווריאנטי.
4. תהי $A = (a_1,...,a_n)$. מצאו את הערכים העצמיים של המטריצה $A^t A$.
5. תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ ונסמן ב- $\lambda_1,...,\lambda_n$ את הערכים העצמיים שלה. מצאו את הערכים העצמיים של האופרטור $X \mapsto AX^tA$ במרחב $M_n(\mathbb{R})$.
6. נתון אופרטור לינארי במרחב ווקטורי מעל שדה $F$ המיוצג על ידי המטריצה:
$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$
נניח שהפולינום $x^n - a_1x^{n-1} - ... - a_{n-1}x - a_n$ אינו מתפרק מעל $F$. הוכיחו שלאופרטור הנתון אין תתי מרחבים אינווריאנטיים לא טריוויאליים.
7. תהי $A$ מטריצה הדומה למטריצת ז'ורדן בעלת בלוק ז'ורדן אחד. מצאו את כל תתי המרחבים האינווריאנטיים של $A$.
8. יהיו $A,B \in M_n(\mathbb{C})$ ונניח ש- $AB = BA$. הוכיחו שקיים ל- $A$ ול- $B$ ווקטור עצמי משותף.
9. מצאו את צורות הז'ורדן של המטריצות הבאות:

א. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10. תהי $A\in M_n\left(F\right)$ עבור $n\geq 2$. נניח ש-$rank\left(A\right)=1$. הוכיחו ש-$\deg m_A\left(\lambda\right)=2$.
11. תהי $A\in M_n\left(\mathbb{C}\right)$. מה אפשר לומר על צורת הז'ורדן של $A$ אם מתקיים $A^3=A^2$?
12. הוכיחו שאם תת מרחב $U$ אינווריאנטי תחת $T$, אזי $U^{\perp}$ אינווריאנטי תחת $T^*$.
13. הוכיחו ש-$K\mathrm{er}\left(T^*\right)=\left(\mathrm{Im}\left(T\right)\right)^{\perp}$.
14. יהי $T$ אופרטור נורמלי במרחב מכפלה פנימית ממשי. נניח ש-$T^2=-I$. הוכיחו ש-$T^*=-T$.
15. הוכיחו שמטריצה אוניטרית מסדר 2 עם דטרמיננטה 1, דומה למטריצה ממשית אורתוגונלית.
16. תהי $A$ מטריצה ממשית סימטרית מסדר $n\times n$. נניח שכל הערכים העצמיים שלה שייכים לקטע $\left[a,b\right]$. הוכיחו שהמטריצה $\left(A-tI\right)$ היא חיובית לחלוטין לכל $t<a$. בפרט, $\left(A-tI\right)$ עבור $t<a$ היא מטריצת גראם ביחס למכפלה הפנימית האוקלידית.