שיעור 7 – מרחבים וקטוריים

(מבנ"ח)

הגדרה של מרחב וקטורי (מ"ו)

מרחבים וקטוריים (מרחבים לינאריים)

<u>הרעיון</u>: הפשטה של F^n (גישה אקסיומטית לפעולות חיבור וקטורים וכפל בסקלר).

<u>הגדרה</u>: יהי F שדה כלשהו.

<u>מרחב וקטורי</u> (=מרחב וקטורים, מרחב לינארי) מעל F הוא קבוצה V (שאבריה ייקראו <u>וקטורים</u>, ואברי השדה F ייקראו <u>סקלרים</u>) עם שתי פעולות: חיבור וקטורים וכפל בסקלר.

כך שמתקיימות האקסיומות הבאות:

(ח1) לכל $\vec{u},\vec{v}\in V$ מוגדר וקטור יחיד $\vec{u}+\vec{v}\in V$

(ח2) לכל $\vec{u},\vec{v}\in V$: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

(ח3) לכל $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

(ח4) קיים וקטור $\vec{0}\in V$ (וקטור האפס) כך שלכל $\vec{v}\in V$ $\vec{v}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}$

(ח5) לכל $\vec{v}\in V$ קיים וקטור $-\vec{v}\in V$ (נקרא <u>הוקטור הנגדי</u> ל- $\vec{v}$) כך ש:

$$\vec{v}+(-\vec{v})=(-\vec{v})+\vec{v}=\vec{0}$$

<u>בקיצור</u>:

(ח0) – (ח4): V חבורה קומוטטיבית לגבי הפעולה + ("חיבור וקטורים").

(כ6) לכל וקטור $\vec{v}\in V$ וסקלר $\alpha\in F$ מוגדר וקטור יחיד $\alpha\cdot\vec{v}\in V$

(כ7) לכל $\vec{u},\vec{v}\in V$, $\alpha\in F$: $\alpha\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$

(כ8) לכל $\vec{u}\in V$, $\alpha,\beta\in F$: $(\alpha+\beta)\vec{v}=\alpha\cdot\vec{v}+\beta\cdot\vec{v}$

(כ9) לכל $\vec{v}\in V$, $\alpha,\beta\in F$: $(\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{v}=\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{v})$

(כ10) לכל $\vec{v}\in V$: $1_F\cdot\vec{v}=\vec{v}$

<u>הערה</u>: אקסיומה (כ4) <u>אינה</u> מיותרת (ז"א, אינה נובעת מיתר האקסיומות).

<u>דוגמא</u>: ניקח $F=\mathbf{R}$, $V=\mathbf{R}^2$.

נגדיר חיבור וקטורים כרגיל: $(x_1,y_1)+(x_2,y_2):=(x_1+x_2,y_1+y_2)$

(חיבור רכיב- רכיב)

אבל, <u>כפל בסקלר יוגדר בצורה שונה</u>:

$$(\forall\alpha\in\mathbf{R},(x,y)\in\mathbf{R}^2)\qquad a\cdot(x,y):=(0,0)$$

קל לבדוק שמתקיימות כל האקסיומות של מרחב וקטורי, פרט ל- (כ4):

$$1_F\cdot(x,y)=(0,0)\overset{\text{רדב"כ}}{\neq}(x,y)$$

לכן נדרוש במפורש את (כ4).

<u>שאלה</u>:

האם צריך לדרוש גם $(\forall\vec{v}\in V)$ $0_F\cdot\vec{v}=\vec{0}$?

<u>תשובה</u>: לא, זה נובע מהאקסיומות.

<u>טענה</u>: אם V מרחב- וקטורי מעל שדה F אז:

(א) $\alpha\cdot\vec{0}=\vec{0}$ $(\forall\alpha\in F)$

(ב) $0_F\cdot\vec{v}=\vec{0}$ $(\forall\vec{v}\in V)$

(ג) אם $\alpha\cdot\vec{v}=\vec{0}$ אז

או $\alpha=0_F$ או $\vec{v}=\vec{0}$ (או שניהם)

21-11-2010

אלגברה לינארית 1 - תרגול 7 (מבמ"ח)

מרחב וקטורי - הגדרה כבשל הקודם.

~~מרחב וקטורי הוא מבנה שמורכב משדה $\mathbb{F}$, מפעולות $+_{\mathbb{F}}$, $\cdot_{\mathbb{F}}$ ומקבוצה V עליה מוגדרת פעולת החיבור $+_V$. כמו כן מגדירים את הפעולה $\cdot_{\mathbb{F}V}$ המחברת בין השדה לקבוצה. הפעולות הנ"ל מקיימות אקסיומות, אותן כבר ראינו בכיתה.~~

<u>דוגמאות למרחב וקטורי (מ"ו):</u>

1) $\mathbb{R}^n$ הוא מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{R}$. איברי $\mathbb{R}$ נקראים "סקלרים" ואיברי $\mathbb{R}^n$ נקראים "וקטורים" והם מהצורה $(a_1,\dots,a_n)$.

2) כל שדה $\mathbb{F}$ הוא מרחב וקטורי מעל עצמו

3) $\mathbb{F}^{m\times n} \leftarrow M_{m\times n}(\mathbb{F})$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. איברי $\mathbb{F}$ הם הסקלרים והוקטורים הם המטריצות $m\times n$.

<u>תרגיל 1.2</u> (עמוד 34)

יהא $\mathbb{R}^2$ עם חיבור וקטורי רגיל. האם פעולת הכפל הבאה משרה מבנה של מ"ו על $\mathbb{R}^2$? $\alpha(x,y)=(\alpha^2x,\alpha^2y)$.

פתרון:

פעולת הכפל בסקלר אמורה לקיים מס' אקסיומות ובינהן גם: ~~ואלה~~ $\forall u,v\in\mathbb{R}^2$,

$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$: $(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$ זוהי אקסיומה 8. ~~$\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$, $(\alpha\beta)v=\alpha(\beta v)$~~.

נבדוק האם הפעולה המוגדרת מקיימת את הפילוג:

$$(\alpha+\beta)(x,y)=((\alpha+\beta)^2x,(\alpha+\beta)^2y)\overset{\text{כפל מקוצר}}{=}(\alpha^2x+2\alpha\beta x+\beta^2x,\ \alpha^2y+2\alpha\beta y+\beta^2y)$$

$$\alpha(x,y)+\beta(x,y)=(\alpha^2x,\alpha^2y)+(\beta^2x,\beta^2y)=(\alpha^2x+\beta^2x,\ \alpha^2y+\beta^2y)$$

ולכן שהביטויים אינם שווים $\Leftarrow$ הפעולה אינה מקיימת את חוק הפילוג $\Leftarrow$ אינה מגדירה מבנה של מ"ו על $\mathbb{R}^2$.

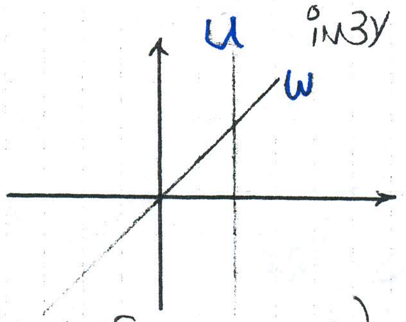
<u>הגדרה - תת-מרחב</u>

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. נאמר ש-W הוא תת מ"ו של V אם:

1) $\phi \neq W \subseteq V$

2) הקבוצה W היא מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ביחס לפעולות החיבור $+_V$ של V והכפל בסקלר $\cdot_{FV}$.

דוגמאות לתת-מרחב וקטורי:



א) $V \subseteq V$ כל מרחב הוא ת"מ של עצמו — תתי-מרחבים טריוויאליים
ב) $\{0\} \subseteq V$ - תת-מרחב האפס
ג) $W=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid a=b\} \subseteq \mathbb{R}^2$

- למעשה, כל קו-ישר העובר דרך ראשית הצירים הוא ת"מ של $\mathbb{R}^2$. (כי חייב שיהיה לו את וקטור האפס)
- הקו הישר $U=\{(2,a) \mid a\in\mathbb{R}\}$ אינו תת-מרחב, שכן לא מתקיימת הסגירות הנדרשה: $(2,5),(2,1)\in U$ אך $(2,5)+(2,1)=(4,6)\notin U$.

ד) $W=\{(a,b,0) \mid a,b\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^3$ ← תת-מרחב, למעשה ← מישור XY.

- כל קו-ישר או מישור שעובר דרך ראשית הצירים הוא ת"מ של $\mathbb{R}^3$.
- אך: $U=\{(a,b,1) \mid a,b\in\mathbb{R}\}$ אינו ת"מ (הסבר כמו קודם).

הערה:

אם $W\subseteq V$ ת"מ אזי $0_W=0_V$ (תוכיחו בשיעורי הבית) ולכן כל ת"מ חייב להכיל את וקטור האפס.

קריטריון מקוצר לתת-מרחב:

כדי לבדוק האם W הוא ת"מ של V, מספיק לבדוק את התכונות הבאות:

1) $0_V\in W\subseteq V$ (או לחלופין, $\phi\neq W\subseteq V$)
2) לכל $w\in W$ ולכל $\alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים $\alpha\cdot_{FV} w\in W$
3) לכל $u,w\in W$ מתקיים $u+_V w\in W$

* כאן להוסיף את שני הדפים המצורפים בסוף. ~~[illegible]~~

תרגיל 2.8 (עמוד 35) (אם נשאר זמן)

יהא V מ"ו ויהיו $U,W\leq V$ תתי-מרחבים שבנוסף כן: $W\subseteq U$.
הוכיחו ש-W היא ת"מ של U.

פתרון:

ניעזר בקריטריון המקוצר.

1) עפ"י הנתון $O_V \in W$, $O_V \in U$. מההערה שעמ' ידוע $O_U = O_V$ $\Leftarrow$ $O_U \in W$.

2) $\alpha \cdot_{F_U} w = \alpha \cdot_{F_V} w \in W$ $\quad \forall \alpha \in F, \forall w \in W$

w תת-מרחב של V ו-U תת-מרחב של V (ולכן $F_U = F_V$)

3) $u +_U w = u +_V w \in W$ $\quad \forall u, w \in W$

תרגיל 2.10 (עמ' 35) (אם נשאר זמן)

תהא $A \in F^{n \times n}$. נגדיר $V_A = \{B \in F^{n \times n} \mid BA = AB\}$.

כל המטריצות שמתחלפות עם A

א) הוכיחו ש-V_A הוא תמ"ו של $F^{n \times n}$.

ב) הוכיחו ש-V_A סגור לכפל מטריצות.

פתרון:

א) נבדוק את הקריטריון המקוצר:

1. עבור $A \in F^{n \times n}$ מתקיים $OA = AO$ ולכן $O \in V_A$

2. יהיו $B \in V_A, \alpha \in F$ אזי מתקיים: $(\alpha B)A = \alpha(BA) \underset{B \in V_A}{=} \alpha(AB) = A(\alpha B)$

ולכן $\alpha B \in V_A$.

3. יהיו $C, D \in V_A$ אזי מתקיים: $(C+D)A = CA + DA \underset{C, D \in V_A}{=} AC + AD = A(C+D)$

ולכן $C + D \in V_A$.

מכיוון שכל התנאים מתקיימים ולכן V_A הוא תמ"ו של $F^{n \times n}$.

ב) יהיו $C, D \in V_A$ אזי: $(CD)A \underset{\text{אסוציאטיביות של כפל מטריצות}}{=} C(DA) \underset{D \in V_A}{=} C(AD) = (CA)D \underset{C \in V_A}{=} (AC)D = A(CD)$

ולכן $C \cdot D \in V_A$.

מש"ל

חיתוך ואיחוד תתי-מרחבים

יהי V מ"ו ויהיו $U, W \subseteq V$ תמ"ו של V.

- $W \cap U = \{v \in V \mid v \in W \wedge v \in U\}$ (וגם) $\leftarrow$ החיתוך הוא תמיד תמ"ו

עבור התת-מרחב הגדול ביותר ששמור ב-U וגם ב-W.

(משמעות: לכל תמ"ו Y המקיים $Y \subseteq U$ ו-$Y \subseteq W$ מתקיים $Y \subseteq U \cap W$).

- $W \cup U = \{v \in V \mid v \in U \vee v \in W\}$ (או) $\leftarrow$ האיחוד הוא תמ"ו רק אם

אחד המרחבים מוכל בשני (תוכיחו בשיעורי הבית).

תרגיל 3.4 (עמ' 35)

יהיו $V=\mathbb{F}^{n\times n}$, $U,W\le V$ תתי-מרחב.

• תארו את $U\cap W$

• הוכיחו ש-$U\subseteq W$ או $W\subseteq U$ ואם לא, אזי הוכיחו ש-$U\cup W$ אינו תמ"ו.

(מטריצה שבאלכסון יש מס' ובשאר יש 0.)

א) U - המטריצות הסימטריות ($A=A^T$) ; W - המטריצות האלכסוניות

• כל מטריצה אלכסונית היא סימטרית ולכן $W=U\cap W$

• מתקיים $W\subseteq U$

(באלכסון ומעל לאלכסון יש איברים, ובשאר יש 0)

ב) U - המטריצות הסימטריות ; W - מטריצות משולשיות עליונות

• $U\cap W$ = {המטריצות האלכסוניות}

הסבר: $A\in U \Rightarrow a_{ij}=a_{ji}$. $A\in W \Rightarrow a_{ij}=\begin{cases}a_{ij} & i\le j\\ 0 & i>j\end{cases}$

$\forall i>j\ \ a_{ij}=0 \Rightarrow a_{ij}=a_{ji}$, $i\neq j: a_{ij}\neq 0 \Rightarrow a_{ji}=0$

• $U\cup W$ אינו תמ"ו. נראה שאין סגירות לחיבור:

$\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\in W$, $\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}\in U$, $\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\2&8\end{pmatrix}\notin U\cup W$

(סכום איברי האלכסון הוא 0)

ג) U - המטריצות האנטי-סימטריות ($A^T=-A$) ; W - מטריצות עם עקבה 0

• $U=U\cap W$

• $U\subseteq W$ שכן ראינו כבר שבמטריצה אנטי-סימטרית כל איברי האלכסון הם 0.

סכום של תתי-מרחב

יהיו V מ"ו ויהיו $U,W\le V$ תמ"ו שלו. הסכום $U+W$ מוגדר ע"י:

$$U+W=\{u+w: u\in U\ ,\ w\in W\}$$

הסכום הוא תמיד תמ"ו והוא התמ"ו הקטן ביותר שמכיל את U ו-W.

משמע: (א) $U\subseteq U+W$ ו- $W\subseteq U+W$

(ב) יהי $Y\le V$ תמ"ו כלשהו. אם $U\subseteq Y$ וגם $W\subseteq Y$ אזי $U+W\subseteq Y$.

תרגיל 4.2: (עמ' 36)

בתרגיל (3.4) מצאו עבור כל סעיף את סכום תתי-המרחבים הנתונים.

פתרון:

א) $W\subseteq U$ ולכן $W+U=U$

ב) $W+U=\mathbb{F}^{n\times n}$. צ"ל: כל מטריצה היא סכום של מטריצה משולשית עליונה ומטריצה סימטרית. נראה את הפירוק במקרה של 2x2 (אבל ניתן להכליל זה בקלות):

$$A=\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0&z\\z&0\end{pmatrix}}_{\text{מטריצה סימטרית}}+\underbrace{\begin{pmatrix}x&y-z\\0&t\end{pmatrix}}_{\text{מטריצה משולשית עליונה}}$$

באופן כללי: $(a_{ij})=A=X+Y$

$$X=\begin{cases}0 & i=j\\ a_{ij} & i>j\\ a_{ij} & i<j\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}a_{ij} & i=j\\ 0 & i>j\\ a_{ij}-a_{ji} & i<j\end{cases}$$

ג) $U\subseteq W$ ולכן $U+W=W$

סכום ישר

יהיו U,W תתי-מרחב של V.
נאמר ש- $U+W$ הוא סכום ישר
אם $U\cap W=\{0\}$. נכתוב $U\oplus W$.

<u>הערה</u>

ראינו בכיתה שבמקרה כזה, כל וקטור x ב- $U\oplus W$ ניתן להצגה <u>באופן יחיד</u> כ: $x=u+w$ עבור $u\in U$, $w\in W$.

<u>דוגמה:</u>

נתבונן בשני תתי-מרחב של $\mathbb{R}^2$:

$$U=\{(x,y)\mid x=y\},\quad W=\{(x,y)\mid x+y=0\}$$

נוכיח ש- $\mathbb{R}^2=U\oplus W$. יש להראות, למעשה, שני דברים:

- $\mathbb{R}^2=U+W$ ← צ"ל, עלינו להציג כל וקטור ב- $\mathbb{R}^2$ כסכום של וקטור מ- U ועוד וקטור מ- W.

יהי $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ וקטור כללי. נחפש הצגה: $(x,y)=u+w$.

נשים לב: $u\in U \leftarrow u=(a,a)$ עבור $a\in\mathbb{R}$ כלשהו

$w\in W \leftarrow w=(b,-b)$ עבור $b\in\mathbb{R}$ כלשהו

$$(x,y)=(a,a)+(b,-b)\rightarrow\begin{cases}x=a+b\\ y=a-b\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=\frac{x+y}{2}\\ b=\frac{x-y}{2}\end{cases}$$

$$\rightarrow (x,y)=\underbrace{\left(\frac{x+y}{2},\frac{x+y}{2}\right)}_{u}+\underbrace{\left(\frac{x-y}{2},\frac{y-x}{2}\right)}_{w}$$

• נראה כעת ש- $U\cap W=\{0\}$.

יהי $(x,y)\in U\cap W$.

$$\begin{cases} (x,y)\in U \Rightarrow x=y \\ (x,y)\in W \Rightarrow x=-y \end{cases} \Rightarrow y=-y \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=0$$

$\Rightarrow (x,y)=(0,0)$.

ובסה"כ הוכחנו ש- $\mathbb{R}^2=U\oplus W$.

בס״ד

תוספת לשיעור 7 (מרחבים וקטורים):

בהינתן מערכת לא-הומוגנית $A\vec{x}=\vec{b}$ (A היא מטריצה $m\times n$) אנו יודעים שייתכנו 3 אפשרויות: למערכת אין פתרון, למערכת יש פתרון יחיד או למערכת יש אינסוף פתרונות.

אבל, למערכת ההומוגנית $A\vec{x}=\vec{0}$ יש תמיד פתרון שהוא $\vec{x}=\vec{0}$, פתרון האפס נקרא - "הפתרון הטריוויאלי". (כל פתרון אחר, אם יש כזה, נקרא "פתרון לא-טריוויאלי"). לכן למערכת הומוגנית יכול להיות פתרון יחיד (שהוא האפס) או אינסוף פתרונות (פתרונות שונים מאפס וגם פתרון האפס).

משפט 1: תהי A מטריצה ריבועית מסדר n. התנאים הבאים שקולים:

א. A הפיכה.

ב. A שקולת שורות למטריצת היחידה I.

ג. A היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות.

ד. הצורה המדורגת קנונית של A היא מטריצת היחידה I.

ה. למערכת הלא-הומוגנית $Ax=b$ יש פתרון יחיד.

ו. למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש רק פתרון טריוויאלי (0).

משפט 2: תהי A מטריצה ריבועית מסדר n. התנאים הבאים שקולים:

א. A לא הפיכה.

ב. למערכת ההומוגנית $Ax=0$ יש פתרון לא-טריוויאלי.

ג. קיים וקטור $b\in F^n$ כך שלמערכת $Ax=b$ אין פתרון.

הגדרה: תהי מטריצה $A\in F^{m\times n}$. המרחב $\{v|Av=0\}$ נקרא מרחב הפתרונות של המערכת $\boxed{Ax=0}$.

תרגיל:

א. הוכח שאוסף הפתרונות של מערכת הומוגנית $Ax=0$ הוא תת-מרחב של F^n.

ב. הוכח שאוסף הפתרונות של מערכת לא-הומוגנית $Ax=b$ אינו תת-מרחב של F^n.

פתרון:

א. נסמן את אוסף הפתרונות של המערכת $Ax=0$ ב-W.

כלו' - $W=\{v|Av=0\}$. ניעזר בקריטריון המקוצר להוכחת תת-מרחב.

1) $0\in W$ - כיוון ש: $A\cdot 0=0$.

2) נוכיח ש: $\alpha v\in W$, כלומר נוכיח ש: $A(\alpha v)=0$. ←

נתון ש: $v\in W$, $\alpha\in F$

המשך

אז: $v \in W \Rightarrow Av=0$ ולכן:

$$A(\alpha v) = \alpha(Av) = \alpha \cdot 0 = 0$$

סקלר יוצא בחוץ לפי חוקי מטריצות

$Av=0$

קיבלנו ש: $A(\alpha v)=0$. ✓

3) - נתון ש: $u,v \in W$ צ"ל: $u+v \in W$. כלומר צ"ל: $A(u+v)=0$.

אז - $u \in W \Rightarrow Au=0$

$v \in W \Rightarrow Av=0$ ולכן:

$$A(u+v) = Au+Av = 0+0=0$$

(חוקי מטריצות)

קיבלנו ש: $A(u+v)=0$ ✓

מש"ל.

ב. המערכת הלא הומוגנית $Ax=b$ (קבוצת הפתרונות של) אינה תת-מרחב של F^n, כיוון שהיא אינה מכילה את וקטור האפס, וראינו שזה תנאי מקדים ראשון לתת-מרחב.

כי $A0=0$ אך: $b \neq 0$.

לדוגמא - אוסף הפתרונות של המערכת $\begin{cases} x+z=1 \\ y-2z=0 \end{cases}$ הוא - $\begin{pmatrix} -t+1 \\ 2t \\ t \end{pmatrix}$

והוא אינו מכיל את הנקודה $(0,0,0)$. לכן זהו לא תת-מרחב.