תרגיל 8

1. אילו מהפונקציות הבאות היא ממכפלה פנימית על $\mathbb{R}^2$:

(א) $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1y_1 + 7x_2y_2$

(ב) $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1x_2 + 7y_1y_2$

2. יהא V ממ"פ מעל $\mathbb{F}$ עם מ"פ $\langle v, u\rangle$.

(א) הוכיחו כמעט לינארית ברכיב שני. כלמר הוכיחו כי $\langle v, \alpha u + w\rangle = \bar{\alpha}\langle v, u\rangle + \langle v, w\rangle$ (לכל $v, u, w \in V$ ולכל α סקלאר)

(ב) יהא $B = \{v_1, \ldots v_n\}$ בסיס. יהא $v \in V$ כך שלכל i מתקיים $\langle v_i, v\rangle = 0$. הוכח כי $v = 0$

(ג) יהא $B = \{v_1, \ldots v_n\}$ בסיס. יהיו $v, u \in V$ כך שלכל i מתקיים $\langle v_i, v\rangle = \langle v_i, u\rangle$. הוכח כי $v = u$

(ד) לכל $\alpha \in \mathbb{R}$ נגדיר פונקציה $\langle \cdot, \cdot\rangle_\alpha : V \times V \to \mathbb{F}$ ע"י $\langle v, v'\rangle_\alpha = \alpha \cdot \langle v, v'\rangle$. הוכיחו כי $\langle \cdot, \cdot\rangle_\alpha$ מ"פ על V אמ"מ $0 < \alpha$.

(ה) יהא V ממ"פ. תהא $T : V \to V$ ה"ל. הפריכו את הטענה: אם לכל $v \in V$ מתקיים כי $\langle Tv, v\rangle = 0$ אזי $T = 0$

3. יהא V ממ"פ מעל $\mathbb{R}$ (עם מ"פ $\langle v, v'\rangle$) ויהא $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס המקיים

$$\langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

כלומר בסיס או"ג שמקיים בנוסף $\langle v_i, v_i\rangle = 1$ לכל i (לבסיס כזה קוראים בסיס אורתונורמאלי).
הוכיחו כי לכל $v \in V$ מתקיים כי

$$\langle v, v\rangle = [v]_B^t \cdot [v]_B$$

($[v]_B$ זה וקטור הקורדינאטות של v ביחס ל B, $[v]_B^t$ זה השילוף שלו והכפל $[v]_B^t \cdot [v]_B$ הוא כפל וקטור $1 \times n$ בוקטור $n \times 1$).

בהצלחה! ☺