תרגול 11- ממפ

הגדרה. מרחב מכפלה פנימית. יהיה Vמ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$ $(\mathbb{F} = \mathbb{C}, \mathbb{R})$ ותהיה פונקציה $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ המקיימת

1. לינאריות ברכיב הראשון:

$$\forall v_1 v_2, v_3 \in V, \alpha \in \mathbb{F} : \langle v_1 + \alpha v_2, v_3\rangle = \langle v_1, v_3\rangle + \alpha \langle v_2, v_3\rangle$$

2. הרמיטיות:

$$\forall v_1 v_2 \in V : \langle v_1, v_2\rangle = \overline{\langle v_2, v_1\rangle}$$

עבור $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ התכונה הנל שקולה לסימטריות.

3. אי שליליות:

$$\forall v \in V : \langle v, v\rangle \geq 0$$

ו-

$$\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

ובמצב זה נאמר ש-$\langle\ ,\ \rangle$היא מכפלה פנימית ו-V הוא מרחב מכפלה פנימית

דוגמה. דוגמאות למכפלה פנימית סטנדרטית:

1. $V = \mathbb{R}^n$, צריך להגדיר פונקציה שמקבלת שני וקטורים ומחזירה מספר שמקיימת את התכונות הנ"ל והיא תהיה

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

2. $V = \mathbb{C}^n$, כאן נגדיר

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

שימו לב שבלי צמוד על y_iזה לא עובד כי עבור תכונה 3 נקבל

$$\left\langle \begin{pmatrix} i \\ i \\ \vdots \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i \\ \vdots \\ i \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} -1 = -n < 0$$

3. $V=\mathbb{R}^{n\times n}$, צריך להגדיר פונקציה שמקבלת שני מטריצות ומחזירה מספר שמקיימת את התכונות הנ"ל והיא תהיה

$$\langle A,B\rangle = tr\left(AB^{t}\right)$$

4. $V=\{f:\mathbb{R}\to[-1,1]\}$ כך ש-f רציפה , צריך להגדיר פונקציה שמקבלת שני פונקציות ומחזירה מספר שמקיימת את התכונות הנ"ל

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f\left(x\right)g\left(x\right)dx$$

הגדרה. נאמר ש- v,w אורתוגונלים (מאונכים) אם מתקיים $\langle v,w\rangle = 0$, ועבור קבוצה אורתוגונלית $L=\{v_1,\ldots,v_n\}$אם מתקיים $\forall i\neq j:\langle v_i,v_j\rangle = 0$

למשל $L=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$היא קבוצה אורתוגונלית כי

$$\begin{cases}\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = 0\\ \left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = 0\\ \left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = 0\end{cases}$$

נורמה מושרית

הגדרה. בהינתן V ממ"פ אזי נגדיר פונקציה הנקראת נורמה מושרית כך:

$$\|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle}$$

לכל $v\in V$

עובדות: מתקיים כי:

1. $\|v\|\geq 0$ ושיוון אמ"מ $v=0$.
2. $\|\alpha v\| = |\alpha|\cdot\|v\|$
3. אי שיוון המשולש: $\|v+u\|\leq\|v\|+\|u\|$

הערה. מועיל לחשוב על נורמה כפונקציה המודדת אורך/גודל של וקטור.

דוגמה.

1. $V=\mathbb{R}^{n}$ עם מכפלה פנימית

$$\langle x,y\rangle = x^{t}y$$

אזי הנורמה המושרת היא

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_ix_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

2. $V=\mathbb{R}^{n\times n}$ עם מכפלה פנימית

$$\langle A,B\rangle = tr\left(AB^t\right)$$

אזי הנורמה המושרת היא

$$\|A\| = \sqrt{tr\left(AA^t\right)} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

נורמת זאת נקראת נורמת פרובניוס
למשל

$$\left\|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+2^2+3^3+4^2} = \sqrt{30}$$

הגדרה. וקטור v נקרא נורמלי אם $\|v\|=1$ למשל $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ הוא נורמלי כי $\left\|\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = 1$

הערה. נשים לב, כל וקטור ניתן הפוך לווקטור מנורמל על יש חלוקה בנורמה למשל

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right\|} = \left\|\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\right\|$$