פתרון תרגיל 3

1. א. נוכיח תחילה ש I^+ חבורה חיבורית: מכיוון ש I אידיאל שמאלי נקבל ש $0 \in I$ ולכן $0R=\{0\}\subseteq I$ ז"א $0 \in I^+$. נניח ש $a,b \in I^+$ ז"א $aR \subseteq I \wedge bR \subseteq I$ מכיוון ש $bR \subseteq I$ נקבל ש $-bR \subseteq I$ כי I אידיאל שמאלי ובפרט חבורה חיבורית ולכן $(a-b)R \subseteq aR-bR \subseteq I$ ז"א $a-b \in I^+$. ז"א I^+ חבורה חיבורית, יהיו $a \in R$ ו $i \in I^+$. $(ia)R=i(aR)\subseteq iR \subseteq I$
השוויון הראשון נובע מאסוציאטיביות, ההכלה כי $aR \subseteq R$ ואח"כ מכיוון ש $i \in I^+$.
$(ai)R=a(iR)\subseteq aI \subseteq I$ סה"כ קיבלנו ש $ia,ai \in I^+$ ולכן $I^+ \lhd R$.

ב. יהי $i \in I$ צ"ל ש $i \in I^+$ ז"א צ"ל ש $iR \subseteq I$ מכיוון ש I אידיאל נקבל שלכל $r \in R$ $ir \in I$ ולכן $iR \subseteq I$.

ג. מסעיף קודם נקבל ש $I^{++} \subseteq I^+$. יהי $i \in I^{++}$ ז"א $iR \subseteq I^+$ מכיוון ש R חוג עם יחידה $i=i1_R \in iR \subseteq I^+$.

2. יהי $x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ ויהי $r \in R$. מכיוון שלכל $\lambda \in \Lambda$ $x \in U_\lambda$ ולכל $\lambda \in \Lambda$ U_λ אידיאל נקבל שלכל $\lambda \in \Lambda$ $xr,rx \in U_\lambda$ ועל פי הגדרת החיתוך $xr,rx \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ כדרוש. (נשאר להראות ש $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ חבורה חיבורית.

3. $I=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a,b\in\mathbb{Z}\right\}, J=\left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} : a,b\in\mathbb{Z}\right\}$.

4.
א. $\Leftarrow$ נניח ש τ אידיאל ויהיו $A \subseteq B \in \tau$ מכיוון ש τ אידיאל נקבל ש $A \cap B \in \tau$ ומכיוון ש $A \subseteq B$ נקבל ש $A \cap B = A$ ז"א $A \in \tau$ ולכן τ סגורה להקטנה. נניח ש $A,B \in \tau$ מכיוון ש $A \setminus B \subseteq A$ נקבל ש $A \setminus B \in \tau$ ומכיוון ש τ אידיאל נקבל ש τ חבורה חיבורית ולכן סגורה לחיבור $A \cup B = (A \setminus B)\Delta B \in \tau$ ולכן τ סגורה לאיחוד.
$\Rightarrow$ נניח ש τ סגורה לאיחוד והקטנה ונוכיח ש τ אידיאל. תחילה נוכיח ש τ חבורה חיבורית.
נתון ש $\tau \neq \varnothing$ נניח ש $A \in \tau$ מכיוון ש $\varnothing \subseteq A$ ונתון ש τ סגורה להקטנה נקבל ש $\varnothing \in \tau$.
מכיוון ש $B\Delta B=\varnothing$ נקבל שהאיבר הנגדי של B הוא B. נניח ש $A,B \in \tau$ מכיוון ש τ סגורה לאיחוד נקבל ש $A \cup B \in \tau$ מכיוון ש $(A \cup B)\setminus(A \cap B) \subseteq A \cup B$ ו τ סגורה להקטנה נקבל ש $A\Delta B \in \tau$ ולכן τ חבורה חיבורית.
יהי $A \in \tau$ ויהי $B \in P(X)$ מכיוון ש $B \cap A \subseteq A$ ומכיוון ש τ סגורה להקטנה נקבל ש $B \cap A = A \cap B \in \tau$.

ב. $\Leftarrow$ נניח ש τ אידיאל, מכיוון ש τ אידיאל $\tau \neq \varnothing$ ויהי $A \in \tau$.
נניח שלכל $B \in \tau$ נקבל ש $B \subseteq A$ ז"א $\tau \subseteq P(A) \leftarrow B \in P(A)$.
נתון ש τ אידיאל ולכן על פי סעיף קודם τ סגור להקטנה
$B \in P(A) \to B \subseteq A \to B \in \tau \Rightarrow P(A) \subseteq \tau$.
נתון ש X קבוצה סופית ולכן τ קבוצה סופית, בנוסף τ סגורה לאיחוד. ניתן להראות באינדוקציה ש τ סגורה לאיחוד של מספר סופי של קבוצות ולכן $A=\bigcup_{C\in\tau} C$ ואז לכל $B \in \tau$ נקבל ש $B \subseteq A$

$\Rightarrow$ נניח שקיימת קבוצה C כך ש $\tau = P(C)$. נניח ש $A, B \in P(C)$ ז"א
$A \subseteq C, B \subseteq C \to A \cup B \subseteq C \to A \cup B \in \tau$ ולכן τ סגורה לאיחוד ועבור $A \in P(C)$ אם
$B \subseteq A \subseteq C$ אז $B \in \tau$ ולכן τ סגורה להקטנה. מהגדרת קבוצת החזקה $\varnothing \neq P(C)$ ועל פי
סעיף קודם τ אידיאל.

5.

א. מכיוון ש $1 \cdot (2x-1) - 2 \cdot (x-1) = 1$ ולכן הם אידיאלים קו- מקסימאלים.

ב. מכיוון ש $\mathbb{Z}/\langle x-1\rangle \cong \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/\langle 2x-1\rangle \cong \mathbb{Z}[0.5]$ לא שדות האידיאלים לא מקסימאליים. (ניתן להראות על ידי משפט האיזומורפיזם הראשון)

6. לוח כפל

	$\langle x+2\rangle$	$1+\langle x+2\rangle$	$2+\langle x+2\rangle$
$\langle x+2\rangle$	$\langle x+2\rangle$	$\langle x+2\rangle$	$\langle x+2\rangle$
$1+\langle x+2\rangle$	$\langle x+2\rangle$	$1+\langle x+2\rangle$	$2+\langle x+2\rangle$
$2+\langle x+2\rangle$	$\langle x+2\rangle$	$2+\langle x+2\rangle$	$1+\langle x+2\rangle$

לוח חיבור

	$\langle x+2\rangle$	$1+\langle x+2\rangle$	$2+\langle x+2\rangle$
$\langle x+2\rangle$	$\langle x+2\rangle$	$1+\langle x+2\rangle$	$2+\langle x+2\rangle$
$1+\langle x+2\rangle$	$1+\langle x+2\rangle$	$2+\langle x+2\rangle$	$\langle x+2\rangle$
$2+\langle x+2\rangle$	$2+\langle x+2\rangle$	$\langle x+2\rangle$	$1+\langle x+2\rangle$