פתרון תרגיל בית 11– טופולוגיה

<u>שאלה 1</u>

נסמן ב-A' את אוסף נקודות ההצטברות של A; נסמן ב-A'' את אוסף נקודות ההצטברות של A' וכן הלאה.

יהי (X,d) מ"מ, תהי $\{x_n\}$ סדרה שכל איבריה שונים המתכנסת ל- $x \in X \setminus A$ כאשר $A=\{x_n\}$.

א. מצאו את A', A''.
ב. האם A קומפקטי?
ג. האם $A \cup \{x\}$ קומפקטי? נמקו את תשובתכם אך ורק באמצעות הגדרת הקומפקטיות דרך **כיסוים פתוחים**!

<u>פתרון</u>

א. טענה: $A'=\{x\}$. תחילה, ברור ש-$\{x\} \subseteq A'$ (שכן יש סדרה מתוך $A \setminus \{x\}$ המתכנסת ל-x). נראה ש-$A' \subseteq \{x\}$. נניח בשלילה שקיימת נקודה $x \neq y \in A'$.
נסמן $\varepsilon = d(x,y)$. מתקיים $B\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varnothing$. אכן, אם $z \in B\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ אז $d(x,y) \le d(x,z)+d(y,z) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ בסתירה להגדרת ε. מכיון ש-y היא נקודת הצטברות, קיימת סדרה $\{y_n\} \subseteq A$ שכל איבריה שונים המתכנסת ל-y. כלומר, עבור ה-ε שהגדרנו קודם, קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$ מתקיים $y_n \in B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)$. כעת, מכיון ש-$x_n \to x$ קיים n_1 כך שלכל $n \ge n_1$ מתקיים $x_n \in B\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right)$. כלומר, פרט למספר סופי של איברים, כל איברי הקבוצה A נמצאים בסביבת $\frac{\varepsilon}{2}$ של x. מכיון ש-$\{y_n\}$ אינסופית נסיק מהנ"ל שקיים איבר בחיתוך $B\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ בסתירה לכך ש-

$B\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right)\cap B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varnothing$.

לגבי A'': מכיון ש-A' סופית, איך לה נקודות הצטברות ולכן $A''=\varnothing$.

ב. כזכור, מרחב מטרי הוא קומפקטי אמ"מ לכל קבוצה אינסופית יש נקודת הצטברות. A תת קבוצה אינסופית של המרחב A , תת המרחב המטרי של (X,d), ללא נקודות הצטברות בתת המרחב המטרי (A,d) (למה?) לכן A אינו קומפקטי.

ג. $A\bigcup\{x\}$ קומפקטי. נוכיח באמצעות כיסויים. יהי $\{U_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של $A\bigcup\{x\}$, ונראה שקיים לו תת כיסוי סופי. קיים i_0 כך ש-$x\in U_{i_0}$. מכיוון ש- $x_n\to x$, קיים n_0 כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים $x_n\in U_{i_0}$. כעת, לכל $j\in\{1,2,3,...,n_0-1\}$ קיים U_{i_j} כך ש- $x_i\in U_{i_j}$. לכן תת הכיסוי הסופי הדרוש הוא $\{U_{i_1},U_{i_2},...,U_{i_{n_0-1}},U_{i_0}\}$.

<u>שאלה 2</u>

יהי (X,d) מ"מ קומפקטי. תהי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ סדרה בעלת גבול חלקי יחיד לכל היותר. הוכיחו שהסדרה מתכנסת.

<u>הדרכה</u>: ראשית הראו שלסדרה אכן קיים גבול חלקי $a\in X$. כעת הניחו בשלילה שהסדרה לא מתכנסת ל-a ובנו תת סדרה $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ כך ש- $d\left(x_{n_k},a\right)\ge\varepsilon$. מכאן הגיעו לסתירה.

<u>פתרון</u>

ל $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ בהכרח קיימת תת סדרה מתכנסת שכן (X,d) מ"מ קומפקטי. מהנתון נקבל של $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ גבול חלקי יחיד $a\in X$. נראה שהסדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת ל-a . נניח בשלילה שהסדרה לא מתכנסת ל-a . לכן,

קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $n_0>n$ כך ש $d\left(x_{n_0},a\right)\ge\varepsilon$ (*)

בעזרת (*) ניתן לייצר תת סדרה $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ כך ש $d\left(x_{n_k},a\right)\ge\varepsilon$. אכן, עבור $n=1$ קיים $n_1>1$ כך ש $d\left(x_{n_k},a\right)\ge\varepsilon$. נניח ש $\{n_1,n_2,\dots,n_{k-1}\}$ כבר הוגדרו כך ש $d\left(x_{n_t},a\right)\ge\varepsilon$ לכל $1\le t\le k-1$

ו- $n_1<n_2<n_3<n_{k-1}$. כעת, בעזרת (*) נקבל שעבור $n_{k-1}\in\mathbb{N}$ קיים $n_k>n_{k-1}$ כך ש $d\left(x_{n_k},a\right)\ge\varepsilon$.

ד. כעת, לסדרה $\left\{x_{n_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ יש תת סדרה מתכנסת $\left\{x_{n_{k_l}}\right\}_{l\in\mathbb{N}}$ כי $\left(X,d\right)$ מ"מ קומפקטי. בהכרח גבול הסדרה $\left\{x_{n_{k_l}}\right\}_{l\in\mathbb{N}}$ הוא a (למה?). אבל זה בלתי אפשרי שכן $d\left(x_{n_{k_l}},a\right)\ge\varepsilon$ לכל $l\in\mathbb{N}$.

<u>שאלה 3</u>

א. הוכיחו שכל מרחב טופולוגי דיסקרטי הוא קומפקטי אמ"מ הוא סופי.

ב. יהי X מ"ט קומפקטי. יהי $\left\{K_i\right\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות סגורות, כך שכל חיתוך סופי של קבוצות מאוסף זה אינו ריק. הוכיחו ש- $\bigcap_{i\in I}K_i\neq\varnothing$.

<u>פתרון</u>

א. יהי X מ"ט קומפקטי ודיסקרטי אזי $\left\{\{x\}:x\in X\right\}$ כיסוי פתוח של X ובשל הקומפקטיות קיים לו תת כיסוי סופי. מכאן נקבל ש- X סופי.

בכיוון ההפוך הטענה נכונה גם ללא הנחת הדיסקרטיות. יהי $\left(X,\tau\right)$ סופי אזי $|\tau|\le|P(X)|=2^{|X|}<\infty$ ומכאן קל להסיק כי לכל כיסוי פתוח קיים תת כיסוי סופי שכן מספר הקבוצות הפתוחות (איברי τ) הוא סופי.

ב. יהי X מ"ט קומפקטי. יהי $\left\{K_i\right\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות סגורות, כך שכל חיתוך סופי של קבוצות מאוסף זה אינו ריק. נוכיח כי $\bigcap_{i\in I}K_i\neq\varnothing$. נניח בשלילה כי $\bigcap_{i\in I}K_i=\varnothing$. על-פי דה-מורגן נקבל:

$X=\varnothing^c=\bigcup_{i\in I}K_i{}^c=\left(\bigcap_{i\in I}K_i\right)^c$. מכיון שבנוסף $\left\{K_i\right\}_{i\in I}$ אוסף סגורות הרי ש- $\left\{K_i{}^c\right\}_{i\in I}$ הוא כיסוי פתוח של X. נתון ש- X קומפקטי ולכן קיימים $i_1,....,i_n$ כך ש

$\bigcup_{m=1}^{n}\left(K_{i_m}\right)^c = X$. נשתמש שוב בכלל דה-מורגן ונקבל $\bigcap_{m=1}^{n} K_{i_m} = \varnothing$ ומצאנו חיתוך סופי ריק של קבוצות מהאוסף $\{K_i\}_{i\in I}$, בסתירה לנתון.

<u>שאלה 4</u>

א. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. יהיו $A_1,...,A_n$ תת-מרחבים קומפקטיים של X. הוכיחו ש- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ הוא קומפקטי.

ב. מצאו דוגמה נגדית כאשר מדובר באינסוף תת-מרחבים קומפקטיים.

ג. יהי X מ"ט האוסדורף. יהי $\{F_i\}_{i\in I}$ אוסף כלשהו של תת-מרחבים קומפקטיים. הוכיחו כי $\bigcap_{i\in I} F_i$ קומפקטי.

<u>פתרון</u>

א. יהיו $A_1,...,A_n$ תתי מרחבים קומפקטיים של X. נראה כי $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ הינו קומפקטי.

יהי $\{U_j\}_{j\in J}$ כיסוי פתוח ל- A ב- X, כלומר: $A\subseteq\bigcup_{j\in J} U_j$. לכל $1\le i\le n$ $A_i \subseteq A\subseteq\bigcup_{j\in J} U_j$ קומפקטי ולכן קיימת תת-קבוצה סופית $F_i\subseteq J$ כך ש $A_i\subseteq\bigcup_{j\in F_i} U_j$.

תהי $F=\bigcup_{i=1}^{n} F_i$. אזי F תת קבוצה סופית של J כאיחוד של מספר סופי של קבוצות סופיות ומתקיים $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i\subseteq\bigcup_{j\in F} U_j$. מצאנו תת כיסוי סופי ומכאן $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ קומפקטי.

ב. ניקח X אינסופי עם טופולוגיה דיסקרטית. הוא לא קומפקטי אבל ניתן להשיג אותו כאיחוד הנקודונים שכל אחד מהם כן קומפקטי.

ג. F_i קומפקטי לכל $i\in I$. X האוסדורף ולכן F_i סגורה ב- X לכל $i\in I$. לכן $A=\bigcap_{i\in I}F_i$ סגורה ב- X. יהי $i_0\in I$ ומתקיים $A\subseteq F_{i_0}$, לכן $A=\bigcap_{i\in I}F_i$ סגורה גם ב- F_{i_0}.
מכיון ש- F_{i_0} קומפקטי ו- A ת"מ סגור שלו נקבל ש- $A=\bigcap_{i\in I}F_i$ ת"מ קומפקטי.

<u>שאלה 5</u>

יהי (X,τ) מרחב טופולוגי האוסדורף. יהי $\left\{E_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ אוסף של תת-מרחבים קומפקטיים לא ריקים כך שמתקיים $E_1\supseteq E_2\supseteq E_3\supseteq\ldots$. הוכיחו ש- $\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i\neq\varnothing$. תנו דוגמה נגדית למקרה שהתת-מרחבים אינם קומפקטיים.

<u>**פתרון**</u>

נניח בשלילה ש- $\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i=\varnothing$. מתקיים $\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(X\setminus E_i\right)=X\setminus\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i=X\supseteq E_1$. נתון ש- E_i הם תת-מרחבים קומפקטיים, ולכן כקבוצות, E_i הן תת-קבוצות סגורות. מכאן $\left\{X\setminus E_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ הוא כיסוי פתוח של E_1. מכיוון ש- E_1 קומפקטי, קיים תת-כיסוי סופי: $E_1\subseteq X\setminus E_{i_1}\bigcup X\setminus E_{i_2}\bigcup\ldots\bigcup X\setminus E_{i_k}$, כאשר בה"כ $E_{i_1}\supseteq E_{i_2}\supseteq\ldots\supseteq E_{i_k}$. לכן, $X\setminus E_{i_1}\subseteq\ldots\subseteq X\setminus E_{i_k}$ ומכאן $E_1\subseteq X\setminus E_{i_k}$ וזו סתירה לכך ש- $E_1\supseteq E_{i_k}\neq\varnothing$.

דוגמה נגדית: למשל ב- $\mathbb{R}$ ניתן לקחת את $E_i=\left(0,\frac{1}{i}\right)$ או את $E_i=\left[i,\infty\right)$.

<u>שאלה 6</u>

א. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי אינסופי המקיים את התכונה הבאה: כל תת-מרחב הוא קומפקטי. הוכיחו ש- (X,τ) אינו האוסדורף.

ב. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי שאינו בן מניה ואינו קומפקטי. הוכיחו שקיים ב- X מספר לא בן מניה של תת-מרחבים קומפקטיים ומספר לא בן מניה של תת-מרחבים לא קומפקטיים.

ג. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי, כך שכל תת-מרחב סגור לא טריוויאלי הוא קומפקטי.
הוכיחו ש-(X,τ) קומפקטי.

<u>פתרון</u>

א. נניח בשלילה ש-(X,τ) הוא האוסדורף. כל תת-מרחב הוא קומפקטי ולכן סגור.
לכן τ היא הטופולוגיה הדיסקרטית. ראינו שמ"ט דיסקרטי הוא קומפקטי אמ"מ הוא סופי. שימו לב ש- X הוא קומפקטי ודיסקרטי ולכן סופי, בסתירה לנתון.

ב. תת-מרחבים קומפקטיים: כל הנקודונים. ברור שיש מספר לא בן מניה של נקודונים.
תת-מרחבים לא קומפקטיים: כל המרחבים מהצורה $X\setminus\{x\}$. ברור שיש מספר לא בן מניה של מרחבים כאלה. נראה מדוע הם לא קומפקטיים. נניח בשלילה ש- $X\setminus\{x\}$ קומפקטי. מכיוון שגם $\{x\}$ קומפקטי, נקבל ש- $X=\left(X\setminus\{x\}\right)\cup\{x\}$ קומפקטי (תרגיל 4 א' בקובץ הנוכחי), בסתירה לנתון.

ג. יהי $\{U_i\}_{i\in I}$ כיסוי פתוח של X ונמצא תת-כיסוי סופי. נבחר את אחת הקבוצות הלא ריקות מהכיסוי U_{i_0} (אם כולן ריקות, אז גם X ריקה ולכן הטענה ברורה). אם $U_{i_0}=X$ סיימנו. אחרת המשלים $X\setminus U_{i_0}$ הוא סגור ולא טריויאלי ולכן קומפקטי.
$\{U_i\}_{i\in I}$ הוא כיסוי פתוח של $X\setminus U_{i_0}$ ב- X ולכן קיים לו תת-כיסוי סופי: $\left\{U_{i_j}\right\}_{j=1}^{n}$.
נקבל ש- $X=\left(\bigcup_{j=1}^{n}U_{i_j}\right)\cup U_{i_o}$.

<u>שאלה 7</u>

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה והפיכה. הוכיחו ש- f הומיאומורפיזם.

<u>הדרכה מומלצת:</u>

א. הראו שלכל $a<b$ קיימים $c<d$ כך ש-$f[a,b]=[c,d]$; בנוסף,

ב. ($f(a)=c$ וגם $f(b)=d$) או ($f(a)=d$ וגם $f(b)=c$)

[כלומר, f (במקרה הזה) מעבירה שפה לשפה.]

ג. הסיקו ש- f פתוחה ולכן גם הומיאומורפיזם.

__**פתרון**__

א. $[a,b]$ קומפקטי וקשיר ולכן $f([a,b])$ קומפקטי וקשיר (בגלל הרציפות). תת-מרחבים קשירים וקומפקטיים של $\mathbb{R}$ (פרט לנקודונים) הם מהצורה $[c,d]$ (ונשים לב ש-$f([a,b])$ אינו נקודון, שכן f חח"ע). לכן ניתן להסיק שקיימים $c,d\in\mathbb{R}$ כך ש- $f([a,b])=[c,d]$.

ב. נראה כעת שייתכן רק אחד משני המצבים הבאים:

1) $f(a)=c\wedge f(b)=d$, או

2) $f(a)=d\wedge f(b)=c$.

אמנם, אחרת קיים $x\in(c,d)$ כך ש- $f(a)=x$ או $f(b)=x$.

נניח ש- $f(a)=x$ (בשלילה).

מתקיים $(a,b]$ ת"מ קשיר אבל $f((a,b])=[c,x)\cup(x,d]$ אינו קשיר וזו סתירה שכן פונקציה רציפה שולחת מרחב קשיר למרחב קשיר ו- $[c,x)\cup(x,d]$ אינו קשיר. בצורה דומה ניתן להוכיח שלא יתכן ש- $f(b)=x$ כאשר $x\in(c,d)$.

לכן בהכרח מתקיים אחד מהמצבים 1) או 2).

ג. מכל אחד מהמקרים הללו ניתן להסיק ש- $f((a,b))=(c,d)$.

כלומר, פתוחה בסיסית (כלומר קטע פתוח) עוברת לפתוחה. מכאן הפונקציה היא פתוחה ולכן היא הומיאומורפיזם.